



CAHIER DE RECHERCHE DE LA CHAIRE FINTECH AMF – FINANCE MONTRÉAL

Modèle de « ROUGH VOLATILITY » pour le Bitcoin et gestion des risques

Par Charles Lorand
Alexandre Roch

ESG, UQAM

Mai 2022

Projet réalisé dans le cadre du 3^{ème} appel de projets
de la Chaire « Facteurs ESG, tendances sur
l'utilisation d'actifs numériques et encadrement
réglementaire dans le domaine des fintechs »



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MODÈLE DE « ROUGH VOLATILITY » POUR LE BITCOIN ET GESTION DES RISQUES

ESSAI

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

MAÎTRISE EN FINANCE APPLIQUÉE

PAR

CHARLES LORAND

MAI 2022

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de recherche, Alexandre F. Roch, pour l'ensemble de ses conseils qui m'ont permis d'avancer à travers la construction et l'écriture de cet essai.

Ce projet a été réalisé dans le cadre du 3e appel de projets de la Chaire « Facteurs ESG, tendances sur l'utilisation d'actifs numériques et encadrement réglementaire dans le domaine des fintechs ». Nous tenons à remercier, mon directeur de recherche et moi, les membres et partenaires de la chaire Fintech AMF – Finance Montréal pour leur contribution à la réalisation de ce projet.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont soutenu ces derniers mois et pendant l'ensemble de mes études. Cet entourage est une chance et un grand facteur de motivation.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----|
| REMERCIEMENTS | ii |
| LISTE DES FIGURES..... | v |
| LISTE DES TABLEAUX | vii |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE 1 Spécification du modèle et description de la simulation | 5 |
| 1.1 Spécification du modèle RSFV..... | 5 |
| 1.2 Description de la simulation | 7 |
| 1.3 Estimation de l'homogénéité du processus de volatilité..... | 9 |
| CHAPITRE 2 Données et méthodologie | 11 |
| 2.1 Traitement des données | 11 |
| 2.2 Méthode MF-DFA..... | 13 |
| 2.2.1 Étape 1 | 13 |
| 2.2.2 Étape 2 | 13 |
| 2.2.3 Étape 3 | 14 |
| 2.2.4 Étape 4 | 14 |
| 2.2.5 Étape 5 | 14 |
| 2.3 Méthode SF | 15 |
| CHAPITRE 3 Résultats | 16 |
| 3.1 Calcul du coefficient de Hurst | 16 |
| 3.1.1 Méthode MF-DFA | 16 |
| 3.1.2 Méthode SF..... | 18 |
| 3.2 Choix de la méthode | 20 |
| CHAPITRE 4 Simulation des processus et mesure du risque | 23 |
| 4.1 Simulation de la volatilité et du prix du bitcoin | 23 |
| 4.2 Analyse de la VaR..... | 25 |
| CHAPITRE 5 Diversification d'un portefeuille avec du bitcoin | 28 |
| 5.1 Corrélation | 28 |
| 5.2 Historique de portefeuilles | 29 |
| CONCLUSION | 34 |
| ANNEXE A Évolution et comparaison des différents portefeuilles | 36 |

ANNEXE B Prix du bitcoin et coefficients de Hurst pour différentes périodes40

ANNEXE C Évolution de la VaR simulée avec le coefficient de Hurst calculé avec la méthode MF-DFA43

BIBLIOGRAPHIE.....44

LISTE DES FIGURES

| | |
|--|----|
| Figure 1.1- Prix journalier du bitcoin du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022. | 4 |
| Figure 1.1 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=100$ | 5 |
| Figure 1.2 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=25$ | 5 |
| Figure 1.3 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=1$ | 5 |
| Figure 1.4 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=5$ | 5 |
| Figure 2.1 - Incréments journaliers de la log-volatilité du bitcoin du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022. | 12 |
| Figure 3.1 - Fonction de fluctuation pour q de -25 pour la courbe la plus basse à 25 pour la courbe la plus haute..... | 16 |
| Figure 3.2 - Coefficients de Hurst pour différentes valeurs de q. | 17 |
| Figure 3.3 - Coefficients de Hurst pour différentes valeurs de q pour le S&P 500. | 18 |
| Figure 3.4 - Fonction de fluctuation pour q de -25 à 25 pour le S&P 500..... | 18 |
| Figure 3.5 - $\log(m(q, \Delta))$ en fonction de $\log(\Delta)$ pour le bitcoin. | 18 |
| Figure 3.6 - ζq en fonction de q et sa droite ajustée. | 19 |
| Figure 3.7 - Coefficient de Hurst sur deux ans avec les deux méthodes et 4 ans de données. | 21 |
| Figure 3.8 - Coefficient de Hurst sur deux ans avec les deux méthodes avec 4 ans et plus de données. ... | 21 |
| Figure 4.1 a. et b. - Volatilité simulée du bitcoin (en rouge) à la suite de la volatilité réalisée des deux dernières années (en bleu). Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite. | 24 |
| Figure 4.2 a. et b. - Prix simulé du bitcoin (en rouge) à la suite du prix des deux dernières années (en bleu). Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite. | 24 |
| Figure 4.3 a. et b. - Histogrammes des rendements simulés. Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite. | 25 |
| Figure 4.4 a. et b. - Zoom des histogrammes précédents sur la queue gauche de la distribution. Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite..... | 26 |
| Figure 4.5 - Comparaison entre la VaR (en %) quotidienne calculée à partir d'une volatilité estimée avec un modèle RSFV sur les deux dernières années et la volatilité réalisée pour la même période. | 26 |
| Figure 4.6 - Valeur de la VaR (en %) quotidienne avec une volatilité simulée par EGARCH. | 27 |

| | |
|---|----|
| Figure 5.1 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (90% S&P 500 et 10% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 36 |
| Figure 5.2 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (80% S&P 500 et 20% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 36 |
| Figure 5.3 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (75% S&P 500 et 25% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 37 |
| Figure 5.4 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (70% S&P 500 et 30% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 37 |
| Figure 5.5 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (90% S&P 500 et 10% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 38 |
| Figure 5.6 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (80% S&P 500 et 20% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 38 |
| Figure 5.7 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (75% S&P 500 et 25% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 39 |
| Figure 5.8 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (70% S&P 500 et 30% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert. | 39 |
| Figure 5.9 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2015 au 14 janvier 2017 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 40 |
| Figure 5.10 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2016 au 14 janvier 2018 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 40 |
| Figure 5.11 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2017 au 14 janvier 2019 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 41 |
| Figure 5.12 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2018 au 14 janvier 2020 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 41 |
| Figure 5.13 a et b – Prix du bitcoin du 14 janvier 2019 au 14 janvier 2021 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 42 |
| Figure 5.14 Prix du bitcoin du 14 janvier 2020 au 14 janvier 2022 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange). | 42 |
| Figure 5.15 - Comparaison entre la VaR (en %) quotidienne calculée à partir d'une volatilité estimée avec un modèle RSFV sur les deux dernières années et la volatilité réalisée pour la même période (méthode MF-DFA)..... | 43 |

LISTE DES TABLEAUX

| | |
|---|----|
| Tableau 1.1 – Liste des entreprises cotées détenant du bitcoin. Tiré d’un rapport de mars 2021. (Deutsche Bank Research, 2021) | 1 |
| Tableau 1.2 – Liste des entreprises acceptant le bitcoin comme forme de paiement. Tiré d’un rapport de mars 2021. (Deutsche Bank Research, 2021) | 2 |
| Tableau 1.3 – Liste des institutions avec le plus d’investissements en bitcoin. Tiré d’un rapport de mars 2021 (Deutsche Bank Research, 2021) | 3 |
| Tableau 3.1 - Coefficients de Hurst pour différentes périodes et pour les méthodes SF et MF-DFA..... | 20 |
| Tableau 5.1 - Coefficient de Corrélacion entre les rendements du BTC et du S&P 500 pour différentes périodes..... | 28 |
| Tableau 5.2 - VaR historique 10 jours et 30 jours, écart-type et moyenne des rendements journaliers et ratio moyenne/écart-type pour des portefeuilles avec des pondérations différentes. Du 6 janvier 2020 au 7 janvier 2022. | 30 |
| Tableau 5.3 - VaR historique 10 jours et 30 jours, écart-type et moyenne des rendements journaliers et ratio moyenne/écart-type pour des portefeuilles avec des pondérations différentes. Du 8 janvier 2018 au 6 janvier 2020. | 31 |
| Tableau 5.4 - Comparaison de la VaR 30 jours, de l'écart-type et de la moyenne des rendements journaliers simulés sur 30 jours pour le modèle RSFV et EGARCH..... | 32 |

INTRODUCTION

Avec une capitalisation totale autour de 2000 milliards de dollars (en janvier 2022) avec un point culminant à presque 3000 milliards de dollars¹, le marché des crypto-monnaies ou cryptoactifs est un marché qui attire de plus en plus l'attention. Particulièrement l'actif principal de ce marché : le Bitcoin. Le Bitcoin pèse à lui seul autour de 700 milliards de dollars (en janvier 2022) avec un point haut à 1270 milliards de dollars² représentant ainsi 40 à 50% du marché total des cryptoactifs.

Pour comprendre l'enthousiasme autour de ce marché émergent et autour du Bitcoin en particulier, il convient d'expliquer qu'est-ce que le Bitcoin et d'où vient-il.

Le Bitcoin est inventé en 2008 avec la publication du papier « Bitcoin : A Peer-to-Peer Electronic Cash System » (Nakamoto, 2008) écrit par un certain Satoshi Nakamoto (pseudonyme d'une personne ou d'un groupe encore inconnu à ce jour). Le concept est clair, le Bitcoin est un réseau de monnaie électronique à travers un système informatique décentralisé. L'utilisation de plusieurs technologies

comme la blockchain et un algorithme de *Proof-of-Work* permet la création de ce réseau qui s'émancipe d'une autorité centrale et permet l'échange de valeur de pair-à-pair grâce à la monnaie intrinsèque du réseau Bitcoin, le bitcoin. C'est donc cette monnaie qui attire tant l'attention et qui est échangée à plus

Tableau 1.1 – Liste des entreprises cotées détenant du bitcoin. Tiré d'un rapport de mars 2021. (Deutsche Bank Research, 2021)

Publicly traded companies holding bitcoins

| Company Name | Activity | # of BTC | Investment (USDmn) | Approximate value in early March 2021 (USDmn) |
|----------------------------------|---|----------|--------------------|---|
| MicroStrategy Inc. | Application software | 91,326 | 2,211 @ \$ 24,210 | \$ 3,690mn (67%) |
| Tesla Inc. | Electric vehicles and components | 47,000 | 1,500 @ 31,915 | \$ 2,580mn (72%) |
| Ruffer Investment Company Ltd. | Investment company | 45,000 | 744 @ \$ 16,539 | \$ 1,044mn (40%) |
| Galaxy Digital Holdings | Institutional brokerage | 16,402 | 134 @ \$ 8,170 | \$ 651mn (535%) |
| Square Inc. | Payments | 8,027 | 220 @ \$ 27,408 | \$ 224mn (11%) |
| Marathon Patent Group Inc. | IP company | 4,813 | 150 @ \$ 31,166 | \$ 250mn (67%) |
| Hut 8 Mining Corp. | Cryptocurrency mining | 3,012 | 37 @ \$ 12,904 | \$ 148mn (302%) |
| Voyager Digital Ltd. | Crypto-currency brokerage | 1,230 | 8 @ \$ 6,398 | \$ 64mn (711%) |
| Riot Blockchain Inc. | Digital currency | 1,175 | 7 @ \$ 6,138 | \$ 61mn (747%) |
| Bit Digital Inc. | Bitcoin mining | 950 | 10 @ \$ 10,616 | \$ 33mn (226%) |
| Coin Citadel Inc. | Mining Digital Assets | 513 | 0.2 @ \$ 359 | \$ 27mn (14,343%) |
| Cyberpunk Holdings Inc. | Investment company | 277 | 2 @ \$ 5,895 | \$ 17mn (938%) |
| Advanced Bitcoin Technologies AG | Specialty software products development | 254 | 2 @ \$ 8,345 | \$ 14mn (595%) |
| DigitalX | Digital payment systems | 215 | 0.9 @ \$ 4,069 | \$ 12mn (1,075%) |
| Hive Blockchain | Cryptocurrency mining firm | 211 | NA | \$ 8mn |
| Argo Blockchain | Crypto asset mining | 209 | 1 @ \$ 6,411 | \$ 12mn (788%) |
| Fortress Technologies Inc. | Industrial equipment | 163 | NA | \$ 9mn |
| BIGG Digital Assets Inc. | Application software | 145 | 1 @ \$ 7,392 | \$ 13mn (1,075%) |
| NexTech | Application software | 130 | 4 @ \$ 30,722 | \$ 4,2mn (5%) |
| Neptune Digital Assets Corp. | Blockchain company | 75 | NA | \$ 4mn |
| FRMO Corp. | Financial risk management | 63 | NA | \$ 4mn |

Source: Cryptopolitan

¹ <https://coinmarketcap.com/charts/>

² <https://coinmarketcap.com/currencies/bitcoin/>

de 65000 USD l'unité à son point le plus haut. Le réseau Bitcoin qui est derrière avec ses algorithmes, ses utilisateurs, sa promesse et son écosystème lui donnent de la valeur.

L'invention du Bitcoin a marqué le début de l'existence du marché des cryptoactifs puisque des milliers d'autres cryptoactifs ont fait leur apparition comme l'ether, le litecoin, bnb, doge, luna par exemple qui sont les jetons (*tokens*) de leur réseau blockchain respectif. Plus récemment l'essor des *stablecoins* a permis le développement de la finance décentralisée aussi appelée *DeFi*. Finalement, le marché des cryptoactifs est un marché extrêmement jeune qui se développe à grande vitesse et qui se voit adopté par de plus en plus de monde. On pense aux particuliers, mais aussi, de plus en plus, aux entreprises qui investissent une partie de leur capital dans le bitcoin par exemple ou qui acceptent des cryptoactifs comme monnaie d'échange sur leur plateforme (Tableau 1.1 – Liste des entreprises cotées détenant du bitcoin. Tiré d'un rapport de mars 2021. (Deutsche Bank Research, 2021) et Tableau 1.2 –

Tableau 1.2 – Liste des entreprises acceptant le bitcoin comme forme de paiement. Tiré d'un rapport de mars 2021. (Deutsche Bank Research, 2021)

| Companies accepting bitcoins | | | |
|---|--|--|---|
| Major companies | Retail stores | Small and medium businesses | Sports and gaming companies |
| <ul style="list-style-type: none"> - Wikipedia - Microsoft - AT&T - Virgin Galactic - Norwegian Air - Namecheap - CheapAir - Gylt - The Internet Archive - The Pirate Bay - iChan - Mega.nz - ExpressVPN - Intuit - PayPal - SimplePay (Nigeria) - T-Mobile (Poland) | <ul style="list-style-type: none"> - Burger King (some outlets) - KFC Canada for a limited time - Overstock - Subway - Tatcha - Pizza Hut (Venezuela) - NewEgg - Purses.io (allows shopping on Amazon with bitcoin) - PizzaForCoins.com (Domino's Pizza has signed up with them) - eGifter.com (allows shopping for brands like GAP, GameStop and JC Penney) - Curryupnow.com (meal can be ordered from 12 restaurants in San Francisco) - Dish Network (America) - Euro-Pacific (a precious metal dealer) - CEX (a shop in Glasgow, Scotland) - PSP Mobile - ShopJoy (an Australian retailer) - Groovespark (USA) - MIT Coop Store (MIT student bookstore) - SFU bookstore (Simon Fraser University in Vancouver, Canada) - Fansa (a Mexico retailer) - Shopify.com - msplnc.com - Rakuten (Japan) | <ul style="list-style-type: none"> - Alza (Czech online retailer) - Alternative Airlines - Bitcoin Travel - Pembury Tavern (a pub in London) - Old Fitzroy (a pub in Sydney) - The Pink Cow (a dinner in Tokyo) - EZTV (Torrents TV shows provider) - Lumife - Elay Vendors - Bitcoincoffee.com - Grass Hill Alpacos (a local farm in Haydenville, MA) - Jeffersons Store (a streetwear clothing store in Bergenfield, NJ) - A Class Limousine (Newark, NJ) - SunTimes.com (a Chicago newspaper) - CrowdIt.com - Museum of the Coastal Bend (Victoria, Texas) - RE/IMAX London - Anagi Metals (precious metal furnisher) - Foodler (North American restaurant delivery company) - Save the Children (global charity organisation) - NCR Silver (point of sales systems) | <ul style="list-style-type: none"> - Miami Dolphins - Dallas Mavericks - Benfica (sports club in Lisbon Portugal) - San Jose Earthquakes - Green Man Gaming (popular digital game reseller) - Zynga (mobile gaming) - Humblebundle.com (indie game site) - BigFishGames.com |

Source: Deutsche Bank, 33 Bitcoins accepted, various other websites.

Liste des entreprises acceptant le bitcoin comme forme de paiement. Tiré d'un rapport de mars 2021. . Plus récemment des institutionnels comme des banques ou des gestionnaires de patrimoine commencent à s'exposer notamment sur le bitcoin à travers des produits dérivés comme les futures ou les options. Certains proposent aussi une exposition à leurs clients. Cette exposition peut être directe ou à travers des ETF (Neureuter, 2021). Comme on peut le voir dans le tableau 3 ci-dessous, Grayscale Investments a de loin le plus de bitcoin sous

gestion. Cela permet à des institutions financières d'investir sur le marché du bitcoin à travers leur produit Grayscale Bitcoin Trust (GBTC).³

Tableau 1.3 – Liste des institutions avec le plus d'investissements en bitcoin. Tiré d'un rapport de mars 2021 (Deutsche Bank Research, 2021).

| Top 5 investors and companies | | |
|-------------------------------------|--|--------------------|
| Company Name | Activity | Investment (USDmn) |
| Grayscale Investments | Asset management | 7,400 |
| Massachusetts Mutual Life Insurance | Insurance | 100 |
| SkyBridge Capital | Alternative investments | 182 |
| 3iQ | Crypto-asset portfolio manager | 128 |
| ETC Group Bitcoin ETP | Develops digital asset backed securities | 80 |

Source: Bit2buzz, Deutsche bank.

C'est dans ce contexte d'adoption que le but de cette recherche a été défini. Avoir du bitcoin dans son portefeuille est de plus en plus accepté, mais le risque lié à un tel investissement est encore mal compris et surtout mal défini. Ainsi il convient de mieux définir le profil rendement/risque du bitcoin. Néanmoins définir le risque de cet actif se révèle complexe, le risque se mesure généralement grâce à la volatilité de l'actif et pour modéliser cette volatilité des modèles existent tels que les modèles GARCH, ARCH etc... Seulement ces modèles ne décrivent pas toutes les propriétés de la volatilité et en particulier le fait stylisé de « *long memory* » aussi appelé « *long-range dépendance* » (*LGD*) qui décrit la vitesse de décroissance de la dépendance statistique de deux points de données à mesure que le temps passe. On peut utiliser la fonction d'autocovariance pour représenter ce phénomène. Dans le cas d'une *LGD*, l'autocovariance entre deux points décroît relativement lentement comme une fonction puissance. Contrairement au phénomène de *short-range dépendance* où l'autocovariance entre deux points décroît très rapidement comme une fonction exponentielle.

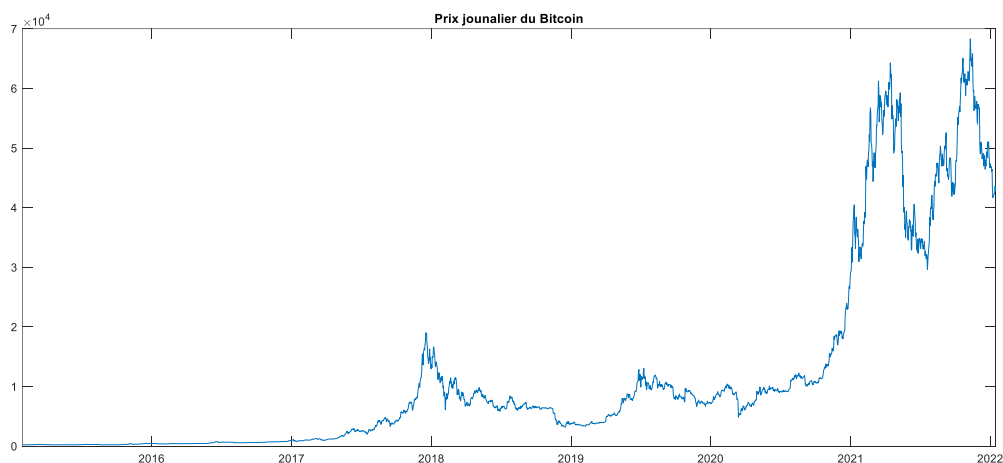
On l'aura compris, le bitcoin a une forte volatilité qui nous porte à croire que les modèles classiques ne représenteraient pas correctement le risque de cet actif (Katsiampa, 2017) (Ardia, et al., 2019).

³ <https://www.forbes.com/sites/michaeldelcastillo/2020/08/06/valuable-sec-data-on-20-institutional-bitcoin-investors-could-soon-disappear/?sh=1441ac251de2>

Comme le montre Gatheral, et al. (2018), les incréments de la log-volatilité des actifs comme l'indice S&P par exemple présentent un caractère « rough » ou chaotique. Cette caractéristique s'exprime avec un modèle appelé « *rough fractional stochastic volatility* » (RSFV) qui contient un mouvement Brownien fractionnaire (fBm) avec un paramètre de Hurst inférieur à 0.5.

Dans cet essai, nous nous inspirons dans un premier temps de cet article pour définir notre modèle RSFV et décrire la simulation que le modèle nous permet de faire. Dans un deuxième temps, nous voyons quelles données nous utilisons et comment nous pouvons définir les paramètres de notre modèle. En particulier le paramètre (ou coefficient) de Hurst. Par la suite, nous choisissons la méthode qui nous paraît être la plus appropriée pour le calcul de ce coefficient. Ainsi, nous simulons la volatilité et le prix du bitcoin pour

Figure 1.1- Prix journalier du bitcoin du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022.



différentes périodes de temps et calculons des mesures de risque comme la VaR. Enfin, nous exposons l'effet de diversification du bitcoin si on l'ajoute dans un portefeuille avec du S&P 500, pour différentes pondérations. Finalement, nous concluons cet essai avec une synthèse des recherches menées et nous portons des recommandations quant à l'intégration du bitcoin au sein de portefeuilles composés d'actifs plus traditionnels.

CHAPITRE 1

Spécification du modèle et description de la simulation

1.1 Spécification du modèle RSFV

Tout d'abord, il est utile de constater que les incréments de log-volatilité du bitcoin mais aussi de beaucoup d'autres actifs ont une distribution proche d'une distribution Gaussienne. Voici des histogrammes des incréments de la log-volatilité $\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t$ par rapport à une loi Normale (en rouge), pour différents lags Δ en jours.

Figure 1.3 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=1$.

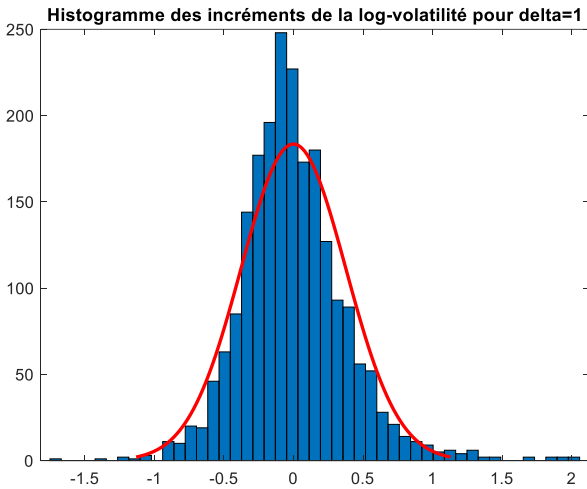


Figure 1.4 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=5$.

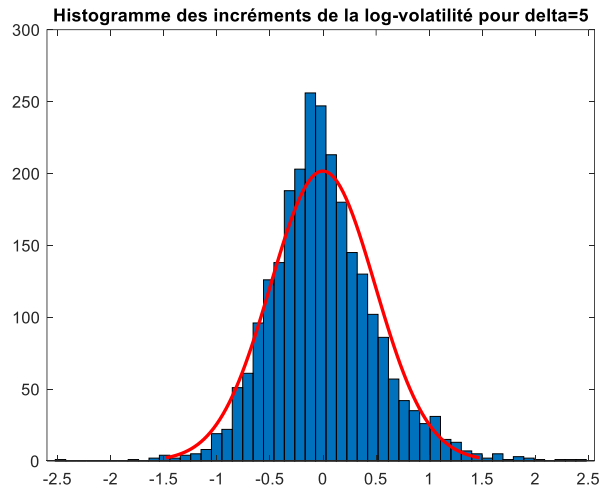


Figure 1.2 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=25$.

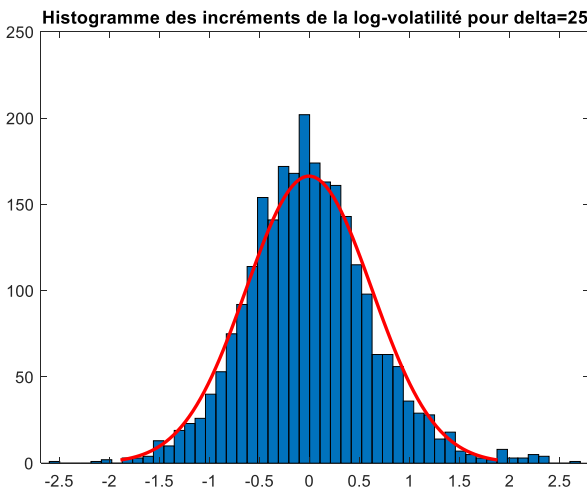
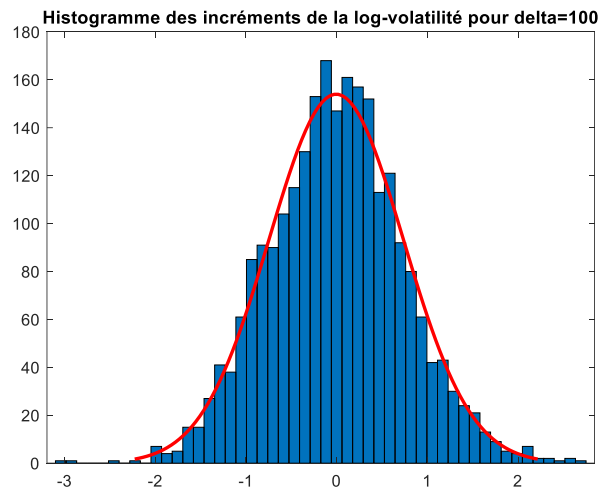


Figure 1.1 - Histogramme des incréments de la log-volatilité pour $\Delta=100$.



À la suite de ces observations nous pouvons suggérer le modèle suivant pour les incréments de la log-volatilité (Gatheral, Jaisson, & Rosenbaum, 2018) :

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu(W_{t+\Delta}^H - W_t^H) \quad (1.1.1)$$

avec W^H un fBm et ν une constante positive qui n'a pas d'interprétation financière particulière.

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\sigma_t = \sigma \exp(\nu W_t^H) \quad (1.1.2)$$

avec σ une autre constante positive.

Cependant ce modèle n'est pas stationnaire, en effet le modèle de log-volatilité n'est pas stationnaire contrairement aux incréments de cette log-volatilité. La stationnarité étant désirable, nous pouvons l'imposer en modélisant la log-volatilité comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire avec un retour à la moyenne très long (Cheridito, et al., 2003). Ce processus (X_t) est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \nu dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt \quad (1.1.3)$$

avec $m \in \mathbb{R}$ et α et ν sont des constantes positives.

La forme explicite de la solution de cette équation est la suivante :

$$X_t = \nu \int_{-\infty}^t \exp(-\alpha(t-s)) dW_s^H + m \quad (1.1.4)$$

Nous avons finalement le modèle de *Rough Fractional Stochastic Volatility* proposé par Gatheral, et al. (2018) suivant :

$$\sigma_t = \exp(X_t) \quad (1.1.5)$$

avec $t \in [0, T]$.

Aussi, on propose un processus de prix du bitcoin basé sur le mouvement brownien géométrique avec la volatilité σ comme suit :

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma_t P_t dW_t \quad (1.1.6)$$

dans lequel W est un mouvement Brownien, indépendant de W^H .

1.2 Description de la simulation

Une fois que l'on a déterminé le coefficient de Hurst, il est possible dans un premier temps de simuler un mouvement Brownien fractionnaire (fBm) puis d'utiliser ce dernier pour simuler et estimer la variance du bitcoin et son prix.

Dans Gatheral, et al. (2018) on simule le processus X en discrétisant l'équation

$$dX_t = \nu dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt \quad (1.1.3)$$

par la méthode d'Euler :

$$X_{(n+1)\delta} = X_{n\delta} + \nu(W_{(n+1)\delta}^H - W_{n\delta}^H) + \alpha\delta(m - X_{n\delta}) \quad (1.2.1)$$

Ce processus simule la log-volatilité, on prend donc l'exponentiel pour avoir la volatilité puis on obtient la variance en prenant le carré de la volatilité :

$$\sigma_{(n+1)\delta}^2 = \exp(X_{(n+1)\delta})^2 \quad (1.2.2)$$

Le processus P du prix du bitcoin, donné par

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma_t P_t dW_t \quad (1.1.6)$$

, est aussi discrétisé avec la méthode d'Euler de la façon suivante :

$$P_{(n+1)\delta} = P_{n\delta} + \mu\delta P_{n\delta} + P_{n\delta}\sqrt{(\sigma_{n\delta}^2)}dW \quad (1.2.3)$$

avec dW l'incrément d'un mouvement Brownien standard (W et W^H sont indépendants), μ la moyenne des rendements du bitcoin sur la dernière année.

Nous devons déterminer les constantes α et ν pour simuler nos processus.

Pour α , Gatheral, et al. (2018) montre que si $\alpha \ll 1/T$ (α largement inférieur à $1/T$), la log-volatilité se comporte localement comme un fBm. La proposition est la suivante :

Proposition 1. Soit W^H un fBm et X^α défini comme

$$X_t = \nu \int_{-\infty}^t \exp -\alpha(t-s) dW_t^H + m \quad (1.1.4)$$

pour un $\alpha > 0$. Quand α tend vers 0 :

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu W_t^H| \right] \rightarrow 0 \quad (1.2.4)$$

Cette proposition implique que dans le modèle RSFV, si $\alpha \ll 1/T$, et que l'on se restreint à l'intervalle $[0, T]$, on peut considérer que le processus de log-volatilité suit un fBm. Nous allons donc prendre un α très petit, $\alpha = 5 * 10^{-4}$, tel que proposé dans Gatheral, et al., (2018).

Gatheral, et al. (2018) montrent aussi le corollaire impliquant que la propriété d'échelle du fBm est reproduite approximativement par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire quand α est petit.

Corollaire 1. Soit $q > 0$, $t > 0$, $\Delta > 0$. Pour α tend vers 0 :

$$E[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q] \rightarrow \nu^q K_q \Delta^{qH} \quad (1.2.5)$$

Ainsi pour déterminer la constante positive ν nous devons d'abord estimer l'homogénéité du processus de volatilité (*smoothness of the volatility process*), représenté par le paramètre de Hurst H .

1.3 Estimation de l'homogénéité du processus de volatilité

On suppose d'abord que nous avons des observations discrètes de la volatilité sur une échelle de temps avec des écarts Δ sur l'intervalle $[0, T]$: $\sigma_0, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, k \in \{0, [T/\Delta]\}$. On définit $N = [T/\Delta]$, et pour $q \geq 0$, on définit :

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q \quad (1.3.1)$$

On suppose que le processus des incréments de la log-volatilité est stationnaire et qu'une loi des grands nombres peut être appliquée. On peut aussi écrire $m(q, \Delta)$ de la manière suivante :

$$E[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q] \quad (1.3.2)$$

avec σ_Δ calculé comme dans l'équation

$$RV_t^{\delta t} = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2 \quad (2.1.2)$$

On peut déduire avec le corollaire 1 et l'équation

$$E[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q] \quad (1.3.2)$$

que :

$$m(q, \Delta) = \nu^q K_q \Delta^{qH} \quad (1.3.3)$$

Dans le cas classique avec un Mouvement Brownien Standard, $H = 0.5$ et donc :

$$m(2, \Delta) = \nu^2 \Delta$$

avec $q = 2$ et $K_2 = 1$ comme nous le voyons ci-dessous.

Pour définir K_q nous pouvons utiliser le papier de Dupret, (2020) qui montre que pour des incréments d'un fBm $(B_t^H)_{t \geq 0}$:

$$E \left(|B_t^H - B_s^H|^{\frac{1}{\gamma}} \right) = E \left(|B_{t-s}^H|^{\frac{1}{\gamma}} \right) = |t - s|^{\frac{H}{\gamma}} E \left(|B_1^H|^{\frac{1}{\gamma}} \right) \quad (1.3.4)$$

Comme le processus de log-volatilité et le fBm ont les mêmes propriétés, on déduit que $K_q = E \left(|B_1^H|^{\frac{1}{\gamma}} \right)^4$.

Aussi, d'après les propriétés du fBm, $E(|B_t^H|^2) = t^{2H}$ et donc $E \left[|B_1^H|^2 \right] = 1$, avec $q = 2$.

Nous pouvons enfin estimer ν . Comme $m(2, \Delta) = \nu^2 E \left[|B_1^H|^2 \right] \Delta^{2H}$,

$$\log(m(2, \Delta)) = 2H \log(\Delta) + \log(\nu^2)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{m(2, \Delta)}{\Delta^{2H}}}$$

En prenant $\Delta = 1$ pour des incréments journaliers, on obtient un $\nu = 0.3676$. Dupret (2020) et Gatheral, et al. (2018) estiment un ν autour de 0.3 pour le S&P 500.

⁴ $\Delta^{qH} = |t - s|^{H/q}$, avec $q = \frac{1}{\gamma}$.

CHAPITRE 2

Données et méthodologie

2.1 Traitement des données

Pour les données nous prenons des données *tick-by-tick* des échanges sur la plateforme Bitstamp en dollars US. Ces données montrent le prix d'échange du bitcoin pour chaque transaction sur cette plateforme (données *tick-by-tick*). On les télécharge sur Bitcoincharts⁵. On choisit d'avoir des données *tick-by-tick* pour avoir une granularité la plus fine possible. Ainsi, après un traitement des données nous pouvons avoir la série de prix du bitcoin du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022 avec des intervalles de 5 minutes. On choisit cette date pour le début de la série car c'est le début d'un nouveau cycle et les volumes⁶ sont plus importants qu'auparavant. Le choix de la plateforme Bitstamp est motivé par le fait que l'historique de prix y est le plus ancien et il n'y a pas de problème dans les données (données manquantes...).

Avec ces données nous voulons calculer la volatilité journalière des prix. Comme nous ne pouvons pas observer directement cette volatilité, nous calculons un proxy de celle-ci que l'on appelle la volatilité réalisée (*realized volatility* - RV).

On dénote p_{tn} ; $t_n = n\delta t$; $n = 0, 1, \dots, M$ le $n^{\text{ième}}$ prix avec des échantillons de période δt au jour t où $M = 1440 \text{min} / \delta t \text{min}$. Ici nous prenons $\delta t = 5$ minutes et donc $M = 288$. Une journée est découpée en 288 segments de 5 minutes et le prix du bitcoin est coté toute la journée (24 heures). On définit le rendement $r_{t,j}$ de la j^e période de la journée t par la différence logarithmique des prix :

$$r_{t,j} = \log p_{t,j} - \log p_{t,j-1} \quad (2.1.1)$$

La RV journalière au jour t avec des segments δt de 5 minutes est :

⁵ <https://api.bitcoincharts.com/v1/csv/>

⁶ <https://messari.io/asset/bitcoin/chart/txn-vol>

$$RV_t^{\delta t} = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2 \quad (2.1.2)$$

Idéalement on veut $\delta t = 0$ pour que la RV converge vers ce qu'on appelle l'*integrated volatility* mais les bruits de marché pour un δt faible sont problématiques (*market microstructure noise*). C'est pour cette raison que nous prenons un δt de 5 minutes qui est un bon compromis (Bandi, et al., 2006) ; (Liu, et al., 2015).

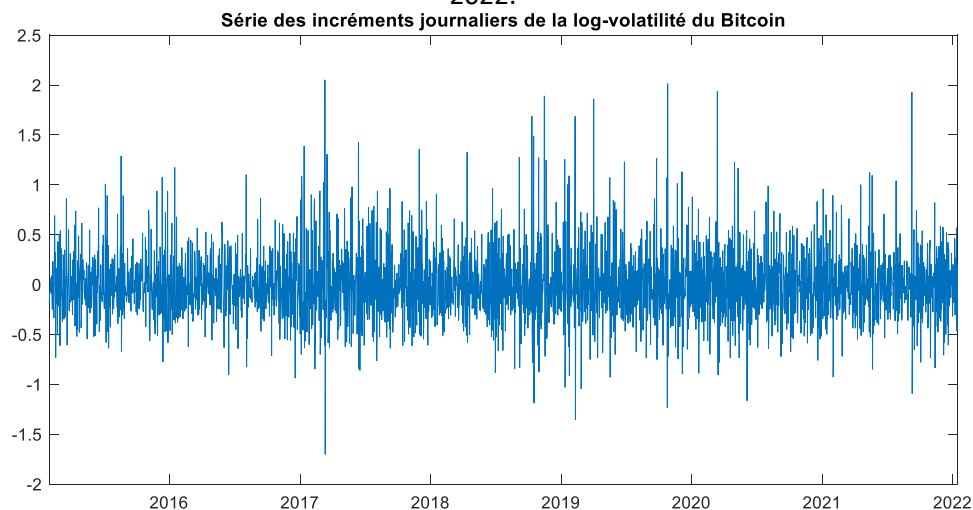
Nous nous intéressons à estimer le coefficient généralisé de Hurst avec la méthode *multifractal detrended fluctuation analysis* (MF-DFA) comme dans l'article de Kantelhardt, et al. (2002). Nous considérons aussi la méthode utilisant la *structure function* (méthode SF) présente chez Gatheral, et al., (2018). Nous pouvons ainsi comparer les résultats des deux méthodes et choisir celle qui nous paraît être la meilleure. Estimer ce coefficient permet par la suite d'estimer le mouvement Brownien fractionnaire qui est nécessaire pour modéliser la volatilité du bitcoin. Notre analyse porte donc sur la volatilité du bitcoin, la série avec laquelle nous travaillons est une série des incréments de la log-volatilité calculés de la manière suivante :

$$LV_t^\Delta = \log(RV_t^{0.5}) - \log(RV_{t-1}^{0.5}) \quad (2.1.3)$$

avec $\Delta = 1$ jour.

C'est sur cette série que nous allons travailler et utiliser la méthode MF-DFA et SF pour déterminer notre coefficient de Hurst.

Figure 2.1 - Incréments journaliers de la log-volatilité du bitcoin du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022.



2.2 Méthode MF-DFA

2.2.1 Étape 1

Pour appliquer la méthode MF-DFA, il faut travailler avec une série agrégée. Une série de prix est un exemple de série agrégée, mais la série de rendements à partir de ces prix n'est pas agrégée. Notre série est composée des incréments de la log-volatilité, elle n'est donc pas agrégée. Nous transformons notre série pour qu'elle le soit. On appelle notre série agrégée $Y(n)$ et LV_t est la série non-agrégée :

$$Y(n) = \sum_{t=1}^n (LV_t - \overline{LV}) \quad (2.2.1)$$

pour $n = 1, \dots, N$ (N le nombre de jours dans notre série de données) et \overline{LV} est la moyenne des observations LV_t ; $\overline{LV} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N LV_t$.

2.2.2 Étape 2

On note S un ensemble d'entiers positifs pour le segment de taille de s . Ici nous prenons S tous les entiers positifs entre 25 et 254 et pour chaque $s \in S$ on découpe la série $Y(n)$ en $N_s = \left\lfloor \frac{N}{s} \right\rfloor$ segments qui ne se chevauchent pas, de taille s .

Par exemple si notre série $Y(n)$ contient 2542 valeurs et que l'on prend une taille de segment $s = 25$, $N_s = \left\lfloor \frac{N}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2542}{25} \right\rfloor = 101$. On peut donc faire 101 segments de 25 valeurs avec notre série $Y(n)$ mais il reste des valeurs à la fin de la série. Pour régler ce problème nous refaisons 101 segments de 25 valeurs mais la première valeur du premier segment sera la première valeur restante à la fin de la série $Y(n)$. Ainsi nous aurons 202 segments, soit $2N_s$. Dans le cas où $s = 41$, 2542 est un multiple de 41 donc toutes les valeurs de la série $Y(n)$ sont utilisées pour faire nos segments et il y a $N_s = 62$ segments.

Pour définir notre intervalle S on prend $\max\left(20, \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor\right)$ pour $s_{minimum}$ et $\min\left(20s_{minimum}, \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor\right)$ pour $s_{maximum}$ (Thompson & Wilson, 2014).

2.2.3 Étape 3

On note $v = 1, \dots, 2N_s$ le $v^{\text{ième}}$ segment de taille s . Pour chaque segment v on ajuste (*fit*) une courbe polynomiale de degré 3, dénotée $y_{v(i)}$. Ainsi on obtient une courbe polynomiale ajustée à chaque segment de taille s . On calcul ensuite l'estimateur de la variance résiduelle pour chaque segment v :

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y(i) - y_{v(i)}\}^2 \quad (2.2.2)$$

pour $v = 1, \dots, 2N_s$

2.2.4 Étape 4

On note Q' une sous-série prédéfinie de Q qui contient 0 et des valeurs positives et négatives de q , on prend $q = [-25, 25]$.

Pour une taille de segment $s \in S$ donnée et pour $q \in Q'$, on calcul la fonction de fluctuation d'ordre q à partir de $F^2(v, s)$:

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (2.2.3)$$

pour $q \in Q' \setminus \{0\}$

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \log[F^2(v, s)] \right\} \quad (2.2.4)$$

pour $q = 0$

On répète les étapes 2 à 4 pour chaque taille de segment $s \in S$.

2.2.5 Étape 5

Pour chaque $q \in Q'$ on régresse $\log[F_q(s)]$ sur $\log(s)$ pour tout $s \in S$. Le paramètre estimé est l'estimateur de $h(q)$, le coefficient de Hurst. Comme nous pouvons le voir dans la Figure 3.2, le coefficient varie en fonction de q et indique de la multifractalité comme le montre Kantelhardt, et al., (2002). Nous

ne traitons pas de cet aspect dans notre essai. Afin de déterminer un coefficient de Hurst général nous prenons la moyenne des $h(q)$ pour $q = [1,5]$.

2.3 Méthode SF

Nous calculons maintenant le coefficient de Hurst avec la méthode SF utilisée dans Gatheral, et al., (2018).

En utilisant l'équation

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q \quad (1.3.1)$$

, nous calculons différentes valeurs de $m(q, \Delta)$ en prenant $q = (0,3]$ et $\Delta = [1,50]$. Le graphique de $\log(m(q, \Delta))$ par rapport à $\log(\Delta)$ met en évidence la relation linéaire décrite par l'équation

$$m(q, \Delta) = v^q K_q \Delta^{qH} \quad (1.3.3)$$

:

$$\log(m(q, \Delta)) = qH \log(\Delta) + \log(v^q) \quad (2.3.1)$$

(le graphique est présenté dans la Figure 3.5.

On régresse $\log(m(q, \Delta))$ sur $\log(\Delta)$ pour chaque q et les β de cette régression sont définis comme $\zeta_q = Hq$. On voit que le coefficient de Hurst H est en fait la pente de la droite formée par les points ζ_q (cf. Figure 3.6).

Nous avons donc deux méthodes pour calculer le coefficient de Hurst, il peut être utile de comparer les résultats de ces deux méthodes et choisir quelle est celle qui nous convient.

CHAPITRE 3

Résultats

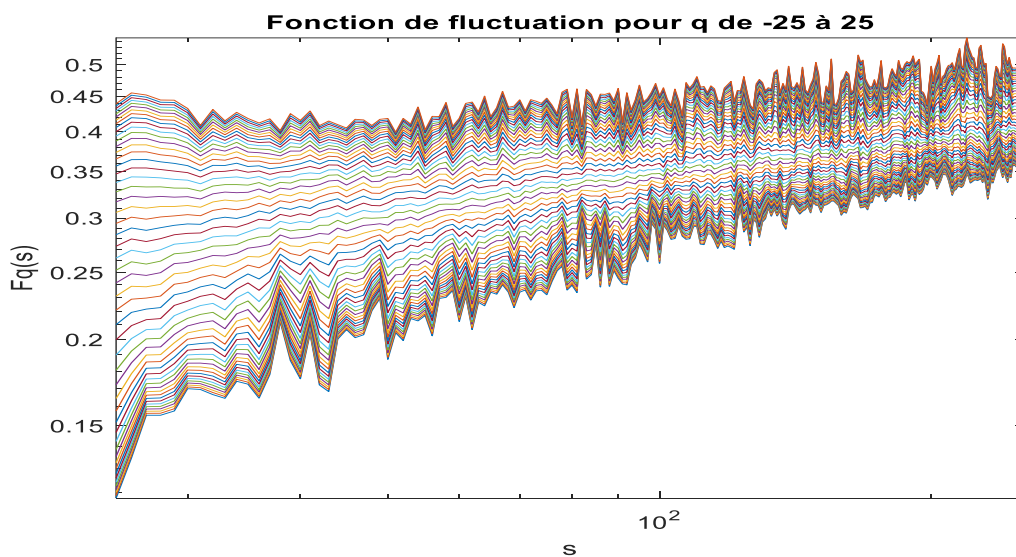
Dans cette section nous présentons les résultats des méthodes décrites dans les parties précédentes. Nous utilisons le logiciel MATLAB pour programmer et obtenir les résultats (valeurs, graphiques, etc.).

3.1 Calcul du coefficient de Hurst

3.1.1 Méthode MF-DFA

Pour la méthode MF-DFA, il s'agit d'obtenir des résultats similaires à Takaishi, (2020). Il est donc intéressant de voir le graphique de la fonction de fluctuation $F_q(s)$

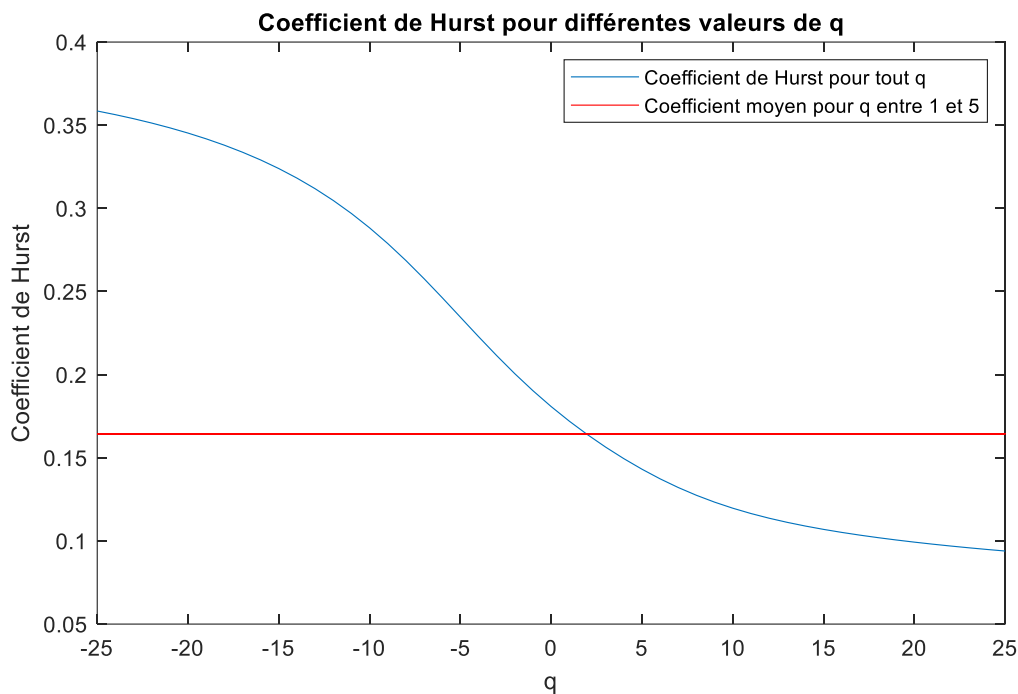
Figure 3.1 - Fonction de fluctuation pour q de -25 pour la courbe la plus basse à 25 pour la courbe la plus haute.



$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (2.2.3)$$

Chaque courbe correspond à une fonction de fluctuation pour différentes valeurs de q croissantes de bas en haut. Ce graphique est similaire à celui de l'article de Takaishi (2020), et indique que l'on est sur la bonne voie pour déterminer le coefficient de Hurst.

Figure 3.2 - Coefficients de Hurst pour différentes valeurs de q .



Le graphique ci-dessus montre le coefficient de Hurst H pour différentes valeurs de q . Nous avons donc plusieurs valeurs de $h(q)$. Afin de déterminer un coefficient de Hurst général, nous prenons la moyenne des $h(q)$ pour $q = [1,5]$ [\(comme expliqué plus haut\)](#). Le résultat est $H = 0.1645$.

En comparant avec les résultats de Takaishi (2020) celui-ci obtient un coefficient de Hurst autour de 0.14 pour la période du 28 janvier 2015 au 6 janvier 2019, nous pouvons constater que notre résultat est relativement proche de ce résultat et cohérent avec la théorie d'une volatilité « *rough* » avec un coefficient bien inférieur à 0.5, c'est-à-dire des incréments de la log-volatilité négativement corrélés illustrés par l'irrégularité de la série que l'on peut voir sur la Figure 2.1.

À titre de comparaison nous calculons aussi le coefficient de Hurst du S&P 500 avec cette méthode sur le même intervalle de temps utilisé précédemment (du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022). Le résultat est $H = 0.1992$. Ce résultat est conforme avec le coefficient trouvé pour le bitcoin. Nous pouvons aussi dire que, sur cette période, les incréments de la log-volatilité du bitcoin ont un comportement plus chaotique ou « *rough* » (les incréments sont plus négativement corrélés) que ceux du S&P 500.

Figure 3.3 - Coefficients de Hurst pour différentes valeurs de q pour le S&P 500.

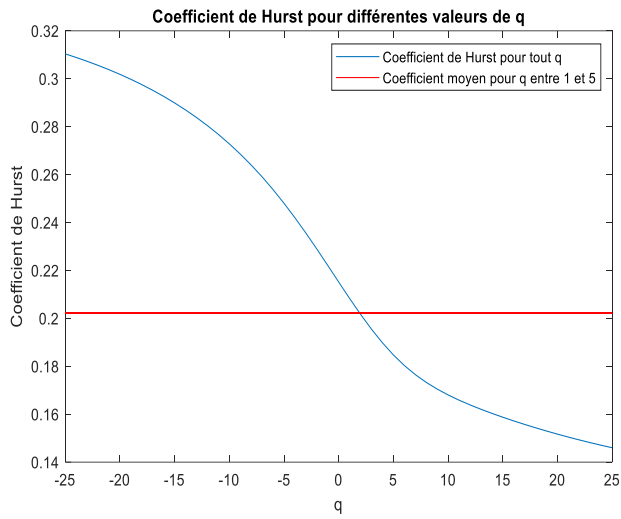
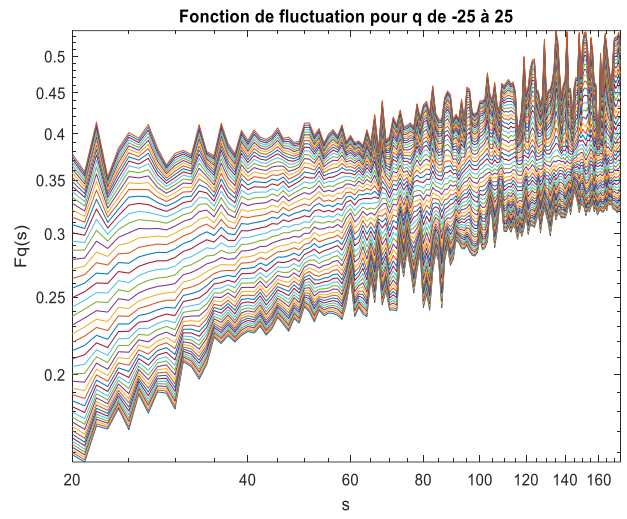


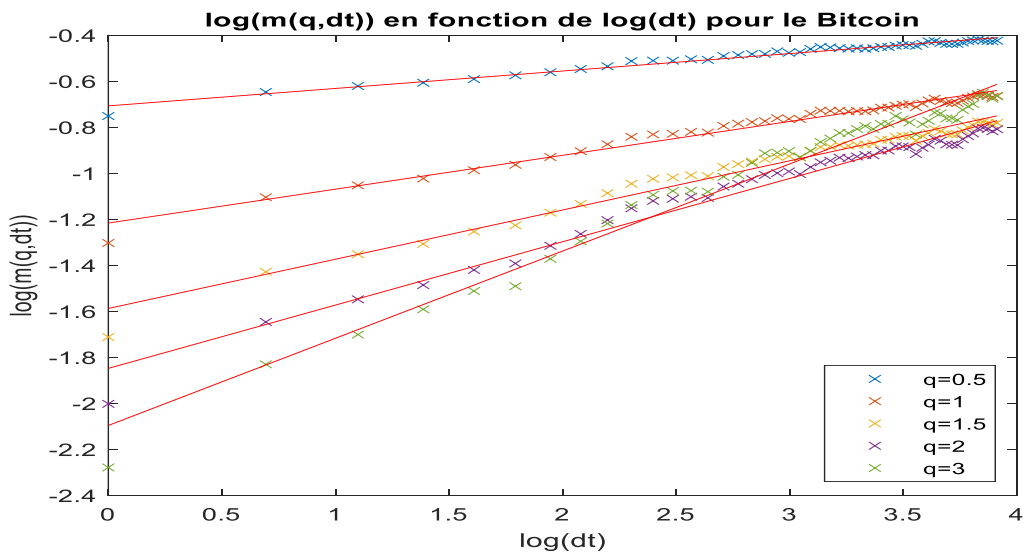
Figure 3.4 - Fonction de fluctuation pour q de -25 à 25 pour le S&P 500.



3.1.2 Méthode SF

Pour la méthode SF nous pouvons comparer nos résultats avec l'article de Takashi, (2020). Gatheral, et al., (2018) utilisent cette méthode pour déterminer le coefficient de Hurst du S&P 500 sur la période du 3 janvier 2000 au 31 mars 2014.

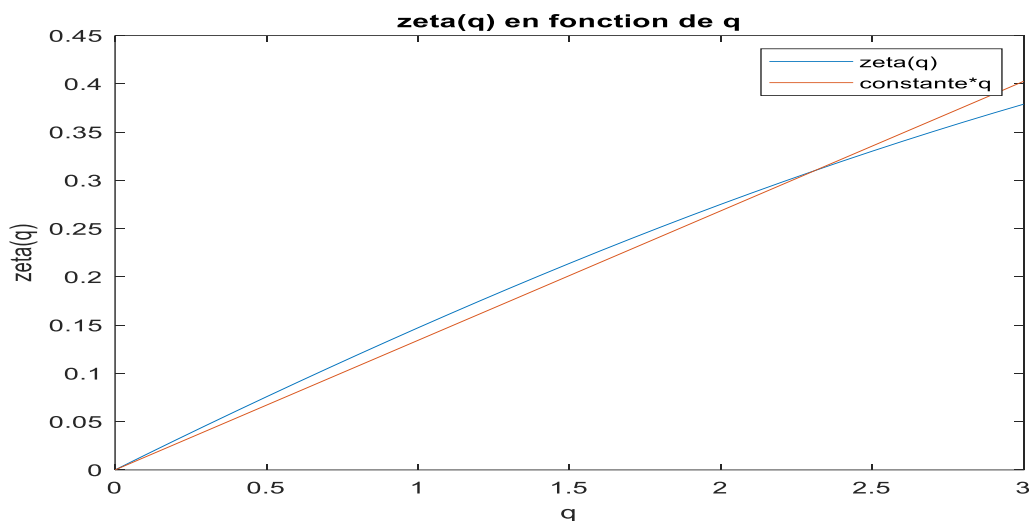
Figure 3.5 - $\log(m(q, \Delta))$ en fonction de $\log(\Delta)$ pour le bitcoin.



Sur ce graphique nous voyons $\log(m(q, \Delta))$ par rapport à $\log(\Delta)$ pour différentes valeurs de q . Pour chaque q , nous avons tracé une droite de régression. Les coefficients de la pente de chacune des droites sont ensuite représentés dans le graphique ci-dessous (ζ_q).

On ajuste ensuite une droite sur la droite ζ_q , le coefficient de la pente de cette nouvelle droite est le coefficient de Hurst.

Figure 3.6 - ζ_q en fonction de q et sa droite ajustée.



Ainsi nous obtenons $H = 0.1342$, ce qui est légèrement inférieur au coefficient de Hurst trouvé avec la méthode MF-DFA. Nous voyons dans la prochaine partie ci-dessous quel coefficient nous retiendrons. Takaishi (2020) trouve un H autour de 0.155 avec la méthode SF (légèrement plus élevé que la méthode MF-DFA).

Gatheral, et al., (2018) obtiennent un $H = 0.142$ pour le S&P 500 et $H = 0.139$ pour le Nasdaq (sur la période du 3 janvier 2000 au 31 mars 2014). Nous calculons un $H = 0.1778$ pour le S&P 500 sur la période du 28 janvier 2015 au 14 janvier 2022.

Tous ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous. Il y a de légères variations dans les résultats qui peuvent s'expliquer par des périodes de temps choisies différentes. On peut toutefois voir que le coefficient de Hurst du bitcoin semble généralement plus faible que celui du S&P 500. Il reste difficile de tirer une quelconque conclusion sur ce point.

Tableau 3.1 - Coefficients de Hurst pour différentes périodes et pour les méthodes SF et MF-DFA.

| MÉTHODE | BTC (2015/2019) | BTC (2015/2022) | S&P500 (2000/2014) | S&P500 (2015/2022) |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| SF | 0.155 | 0.1342 | 0.1263 ⁷ | 0.1778 |
| MF-DFA | 0.14 | 0.1645 | 0.1335 | 0.1992 |

3.2 Choix de la méthode

Nous avons vu deux méthodes différentes pour déterminer le coefficient de Hurst. Il s'agit maintenant de choisir quelle méthode nous retenons pour simuler le mouvement Brownien fractionnaire (fBm).

Pour ce faire, nous nous intéressons à l'évolution du coefficient de Hurst calculé avec les deux méthodes sur une période de deux ans, du 14 janvier 2020 au 14 janvier 2022.

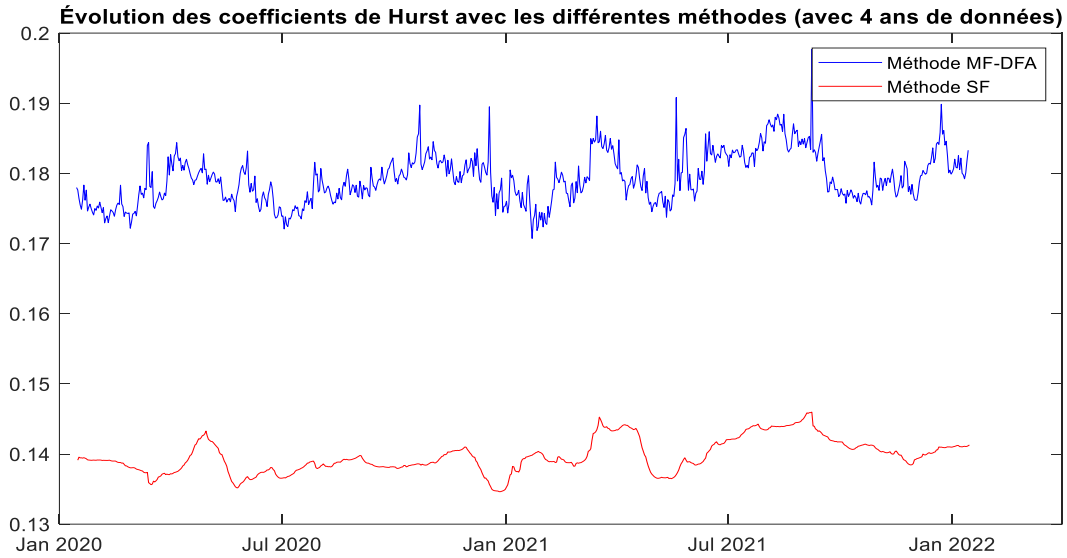
Dans un premier temps, nous prenons 4 ans de données antérieures au 14 janvier 2020 pour calculer le coefficient. Pour chaque jour qui suit, nous prenons les données des 4 années précédentes. Ainsi le premier coefficient est calculé avec des données à partir du 14 janvier 2016 et le dernier coefficient avec des données à partir du 14 janvier 2018.

Nous pouvons voir avec ce graphique (Figure 3.7) que le coefficient de Hurst reste sur une tendance neutre pour les deux méthodes avec H autour de 0.18 pour la méthode MF-DFA et H autour de 0.14 pour la méthode SF.

Dans un second temps, nous voulons voir l'impact de l'ajout de données sur le calcul de H . Ainsi, calculons le coefficient pour la même période que plus haut avec 4 ans de données pour le premier H le 14 janvier

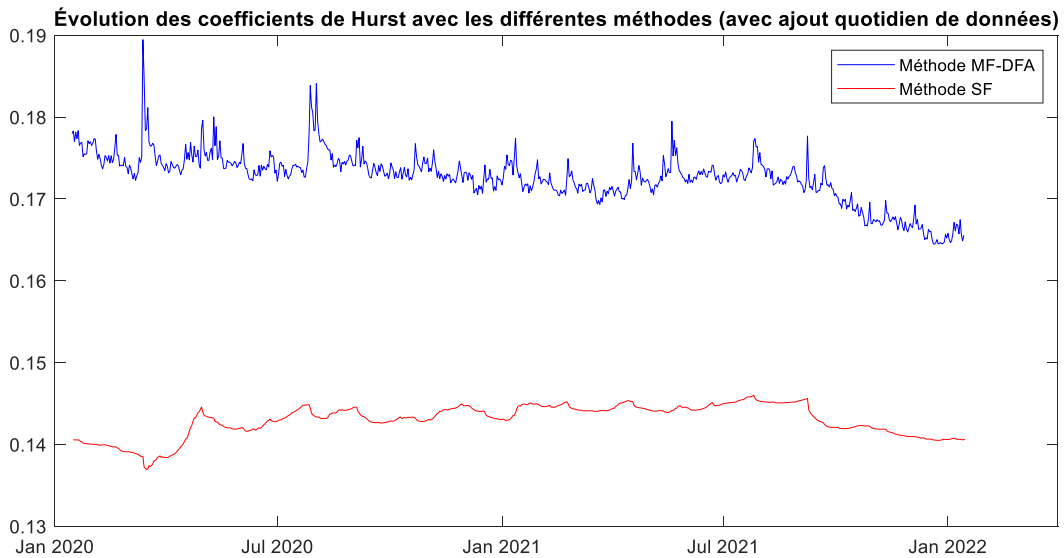
⁷ Cette valeur a été calculée par le modèle que l'on a programmé. Elle diffère légèrement de la valeur présentée par Gatheral, et al., (2018).

Figure 3.7 - Coefficient de Hurst sur deux ans avec les deux méthodes et 4 ans de données.



2020. Chaque jour, le coefficient est recalculé avec une journée de donnée en plus, ainsi pour le dernier jour nous avons 6 ans de données (de 2016 à 2022) au lieu des 4 ans dans le calcul précédent.

Figure 3.8 - Coefficient de Hurst sur deux ans avec les deux méthodes avec 4 ans et plus de données.



Nous pouvons observer (Figure 3.8) cette fois-ci que le calcul de H est plus stable pour les deux méthodes. De plus, on voit que la méthode MF-DFA a une tendance à la baisse sur les derniers mois. On peut supposer que la méthode MF-DFA surestime le coefficient de Hurst. Nous utilisons donc le coefficient de Hurst calculé avec la méthode SF pour nos simulations.

CHAPITRE 4

Simulation des processus et mesure du risque

4.1 Simulation de la volatilité et du prix du bitcoin

On peut maintenant simuler les processus présentés en

$$X_{(n+1)\delta} = X_{n\delta} + \nu(W_{(n+1)\delta}^H - W_{n\delta}^H) + \alpha\delta(m - X_{n\delta}) \quad (1.2.1)$$

et

$$P_{(n+1)\delta} = P_{n\delta} + \mu\delta P_{n\delta} + P_{n\delta}\sqrt{(\sigma_{n\delta}^2)}dW \quad (1.2.3)$$

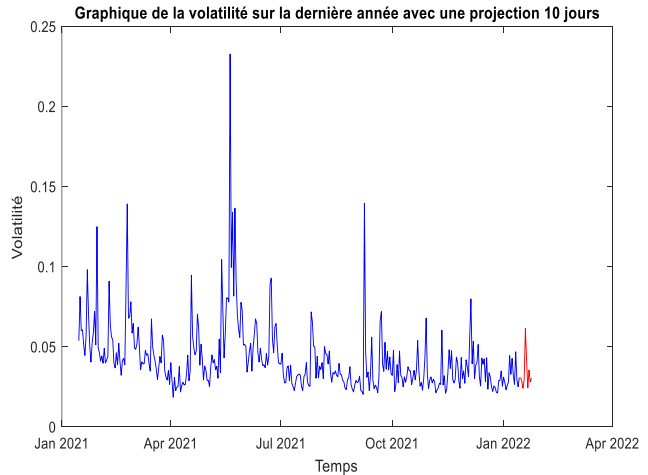
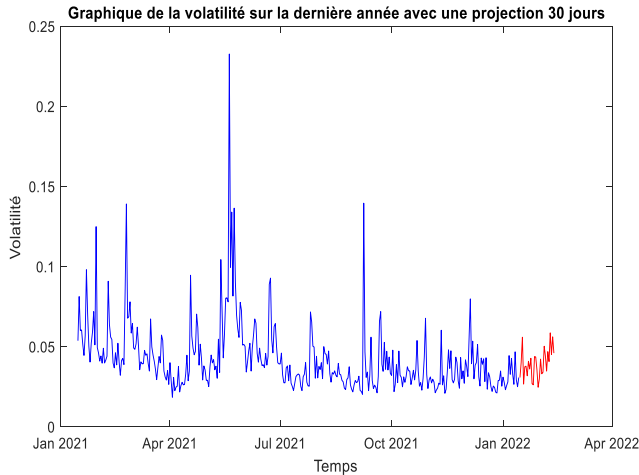
.On s'intéresse à calculer ensuite une VaR 95% sur 10 jours et 30 jours, nous simulons la variance et le prix du bitcoin pour les 10 et 30 prochains jours à l'aide de la méthode Monte Carlo. Le prix P est simulé selon la discrétisation d'Euler de l'équation

$$P_{(n+1)\delta} = P_{n\delta} + \mu\delta P_{n\delta} + P_{n\delta}\sqrt{(\sigma_{n\delta}^2)}dW \quad (1.2.3)$$

et le mouvement Brownien fractionnaire W^H est simulé grâce à une fonction MATLAB écrite par Kroese & Botev, (2015). Nous choisissons la VaR comme mesure de risque car c'est une mesure de risque de marché très répandue parmi les institutions financières (McKinsey & Company, 2012) et les accords de Bâle donnent une méthode de calcul de VaR (Kou, Peng, & Heyde, 2013).

On effectue un million de simulations pour avoir un résultat précis.

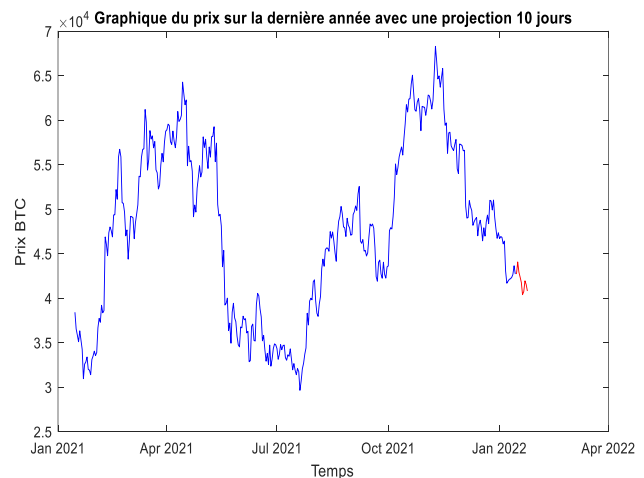
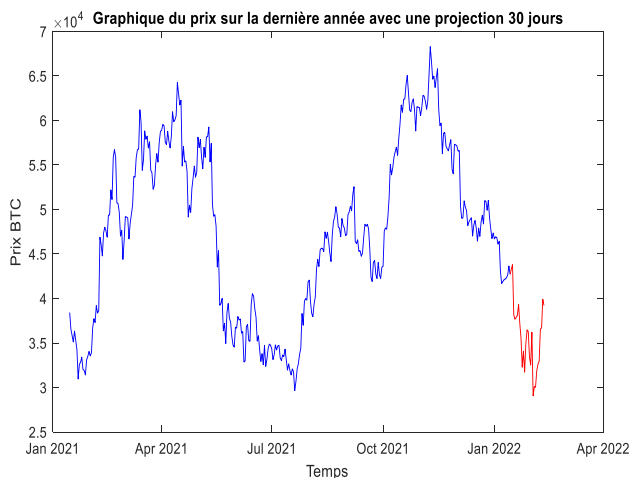
Figure 4.1 a. et b. - Volatilité simulée du bitcoin (en rouge) à la suite de la volatilité réalisée des deux dernières années (en bleu). Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite.



On peut voir en rouge sur ces graphiques la volatilité simulée pour une seule simulation (parmi le million de simulations). L'allure chaotique de la courbe est bien représentée, cela conforte le choix et la calibration du modèle. La volatilité annualisée sur cette période est de 76.86%. À titre de comparaison, celle du S&P 500 est de 26.20%.

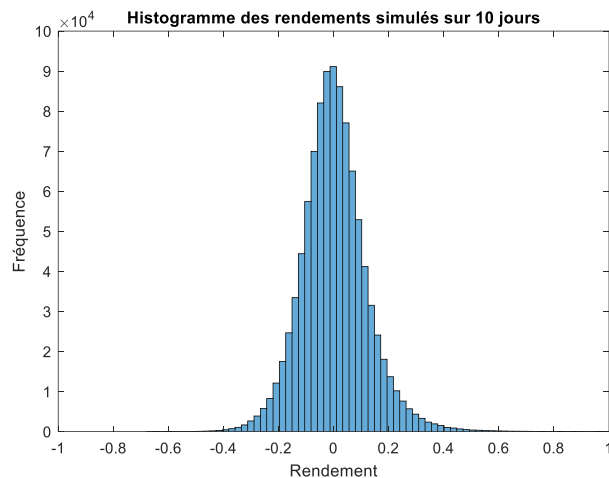
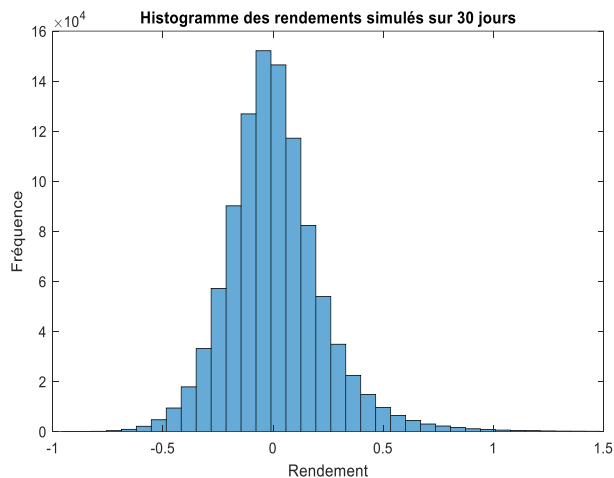
De même pour le prix, l'allure de la courbe est respectée et le mouvement des prix simulés est représentatif du mouvement des prix passés.

Figure 4.2 a. et b. - Prix simulé du bitcoin (en rouge) à la suite du prix des deux dernières années (en bleu). Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite.

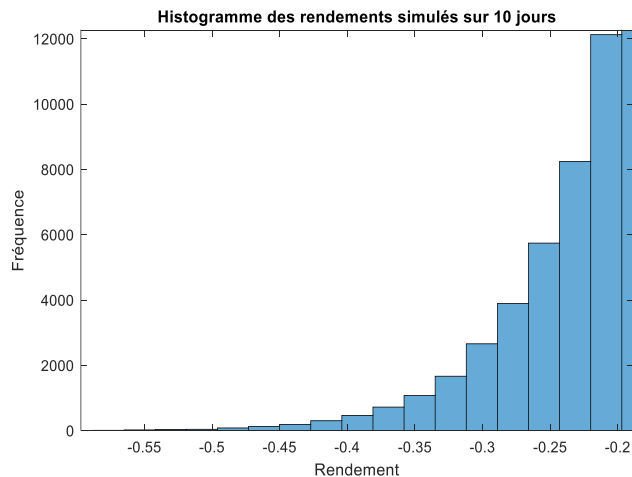
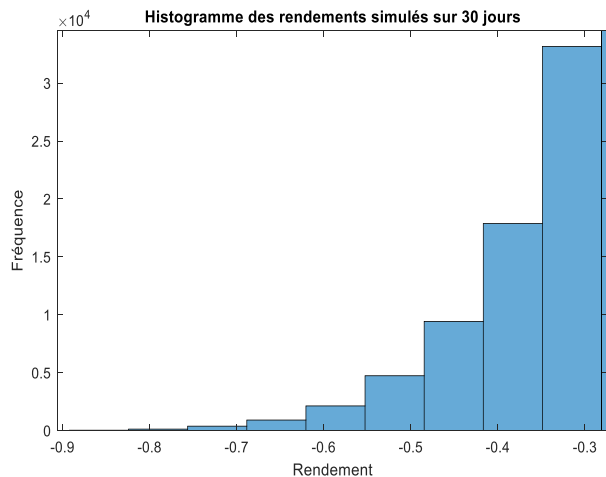


4.2 Analyse de la VaR

Figure 4.3 a. et b. - Histogrammes des rendements simulés. Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite.



Ici, nous avons les histogrammes des rendements sur 10 et 30 jours. Nous voulons estimer une VaR 95% sur ces deux horizons temporels, l'observation de ces histogrammes montre ce à quoi nous pouvons nous attendre. Pour 30 jours on voit que les pertes maximales se situent autour de -90% (phénomène extrêmement rare) et que le 5% des pires performances (queue gauche de la distribution) se situe entre -35% et -90%.



Pour 10 jours la perte maximale est moins extrême et se situe autour de -60%. Le 5% des pires performances se situe plutôt entre -20% et -60%.

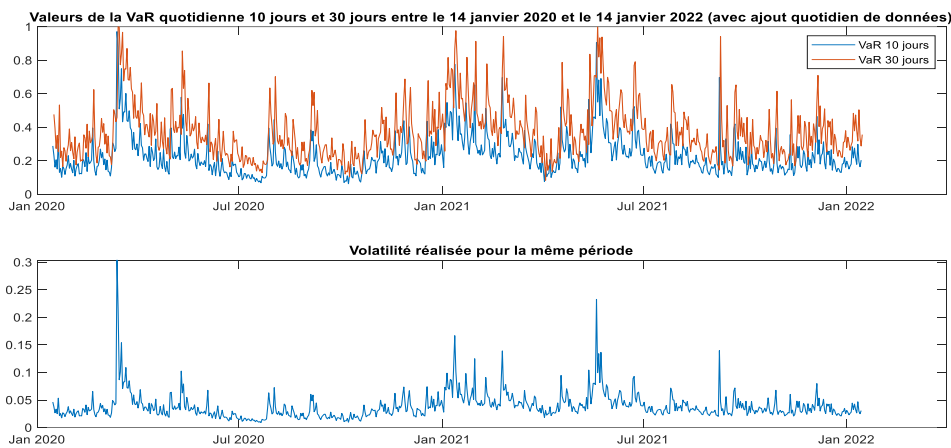
Après avoir effectué le million de simulations, nous pouvons calculer le rendement sur la période (avec le dernier prix observé comme point initial). Nous trions ensuite ces rendements du plus faible au plus élevé et l'observation qui correspond à 5% du nombre d'observations ($1000000 \cdot 0.05 = 50000^{\text{ème}}$ observation ici)

Figure 4.4 a. et b. - Zoom des histogrammes précédents sur la queue gauche de la distribution. Pour 30 jours simulés à gauche et 10 jours simulés à droite.

est définie comme étant la *VaR* 95%. Pour une période de 30 jours, nous obtenons une *VaR* 95% de 31.48% et pour une période de 10 jours 17.96%.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution quotidienne de la VaR sur une période de deux ans, du 14 janvier 2020 au 14 janvier 2022.

Figure 4.5 - Comparaison entre la VaR (en %) quotidienne calculée à partir d'une volatilité estimée avec un modèle RSFV sur les deux dernières années et la volatilité réalisée pour la même période.

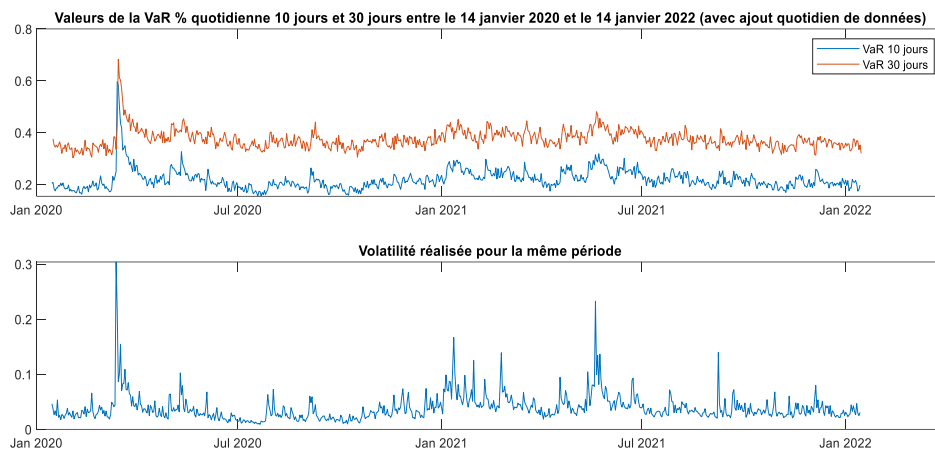


Comme nous pouvons le voir sur le graphique, la VaR est très volatile et dépend fortement de la volatilité. Le graphique ci-haut présente les VaR 10 jours et 30 jours en valeur absolue. Nous avons choisi de l'afficher comme ça pour montrer la similarité du graphique avec celui de la volatilité réalisée en dessous. Nous avons aussi calculé la VaR avec la méthode MF-DFA pour le calcul du coefficient de Hurst, les valeurs de la VaR ne présentent aucune différences visibles (Prix du bitcoin du 14 janvier 2020 au 14 janvier 2022 (à

gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).Figure 5.14).

À titre de comparaison, nous calculons la VaR quand la volatilité du bitcoin est simulée par un processus EGARCH.

Figure 4.6 - Valeur de la VaR (en %) quotidienne avec une volatilité simulée par EGARCH.



La VaR quotidienne obtenue présente une certaine stabilité et dépend plus faiblement de la volatilité réalisée comme avec notre modèle de « rough volatility ». On en conclut que la corrélation négative de la volatilité et la propriété de persistance des périodes de haute volatilité en alternance avec des périodes de basse volatilité (*volatility clustering*), deux caractéristiques typiques du modèle RSFV lorsque $H < \frac{1}{2}$, engendrent une VaR qui est beaucoup plus variable dans le temps que dans les modèles classiques de volatilité.

CHAPITRE 5

Diversification d'un portefeuille avec du bitcoin

5.1 Corrélation

Maintenant que nous avons déterminé le risque de marché du bitcoin il peut être intéressant de voir la pertinence d'intégrer cet actif dans un portefeuille traditionnel. Dans un premier temps nous pouvons étudier la corrélation entre les rendements du bitcoin et ceux du S&P 500 pour différentes périodes.

Tableau 5.1 - Coefficient de Corrélation entre les rendements du BTC et du S&P 500 pour différentes périodes.

| PERIODE | 2013 – 2015 | 2015 – 2017 | 2017 – 2019 | 2019 – 2021 | 2013 – 2018 | 2018 – 2022 | 2021 – 2022 |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| COEFFICIENT | 0.00199 | -0.00078 | 0.01609 | -0.08552 | 0.00463 | -0.05271 | -0.02883 |
| P-VALUE | 0.9638 | 0.9859 | 0.7192 | 0.0548 | 0.8681 | 0.0944 | 0.6481 |

En ce qui concerne les périodes choisies, nous prenons des intervalles de deux ans entre 2013 et 2021 puis deux intervalles de temps plus long avec 2018 comme année de séparation. Cette année de 2018 n'est pas choisie au hasard, effectivement elle correspond à l'année d'introduction des futures sur le bitcoin (décembre 2017)⁸ et au sommet de la bulle spéculative. Depuis cette année-là, le bitcoin est devenu beaucoup plus populaire autant chez les investisseurs particuliers que chez les investisseurs institutionnels comme nous l'avons mentionné dans l'introduction. On peut donc imaginer un changement dans la corrélation de cet actif face aux marchés traditionnels, mais nous n'observons pas de tel changement. En effet, la p-value pour la plupart des périodes ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse de corrélation nulle. Nous pouvons rejeter cette hypothèse pour la période 2019/2021 et 2018/2022, pour ces deux périodes le coefficient de corrélation est légèrement négatif et statistiquement significatif pour un seuil de 10%. Klein, et al., (2018) vont plus loin et appliquent un modèle de corrélation dynamique avec la

⁸ <https://bitcoinmagazine.com/culture/bitcoin-futures-are-here-story-so-far>

méthode BEKK-GARCH et montrent que la corrélation change brutalement de négative à positive quand le S&P 500 est dans un mouvement baissier.

À la lumière de ces résultats sur les corrélations, nous pouvons dire que le bitcoin offre un fort pouvoir de diversification à long terme comme le montrent les coefficients de corrélation de Pearson calculés. Cependant il faut être conscient que pendant les phases de marché baissier, la détention de bitcoin dans un portefeuille peut engendrer des pertes plus importantes qu'un portefeuille qui n'en détient pas.

5.2 Historique de portefeuilles

Nous allons maintenant voir l'effet de l'ajout du bitcoin sur un portefeuille composé du S&P 500. Dans les graphiques que nous pouvons voir en [annexe A](#), nous affichons 3 courbes : l'évolution du S&P 500, l'évolution du portefeuille bitcoin / S&P 500 sans rééquilibrage et l'évolution du portefeuille avec rééquilibrage.

Le portefeuille sans rééquilibrage est un portefeuille dans lequel une position est prise sur le S&P 500 et sur le bitcoin (en fonction des pondérations choisies) et cette position est maintenue sur toute la période (la quantité de bitcoin et de S&P 500 reste constante).

Le portefeuille avec rééquilibrage, quant à lui, fait varier plusieurs paramètres :

- L'objectif de pondération du bitcoin. On veut par exemple que notre position bitcoin soit autour de 10% de notre portefeuille total pour toute la période.
- La pondération maximale tolérée pour notre position bitcoin. Si cette pondération maximale est dépassée alors on rééquilibre notre portefeuille en vendant une partie de notre position bitcoin pour revenir à l'objectif de pondération.
- La pondération minimale tolérée pour notre position bitcoin. Si la position passe sous le seuil minimal alors on rééquilibre notre portefeuille en achetant du bitcoin (financé par la vente de notre position sur le S&P 500) pour revenir à l'objectif de pondération.
- La fréquence de rééquilibrage. Nombre de sessions de trading (jour où le marché est ouvert) entre lesquelles il faut attendre pour prendre une décision de rééquilibrage. Par exemple, toutes les 5 séances de marché, je rééquilibre mon portefeuille si nécessaire (c.-à-d. si la pondération maximale ou minimale n'est pas respectée).

La période couverte est du 6 janvier 2020 au 7 janvier 2022 avec une fréquence de rééquilibrage de 5 séances de marché.

Tableau 5.2 - VaR historique 10 jours et 30 jours, écart-type et moyenne des rendements journaliers et ratio moyenne/écart-type pour des portefeuilles avec des pondérations différentes. Du 6 janvier 2020 au 7 janvier 2022.

| PORTEFEUILLE (S&P 500 - BTC) | 100-0 | 90-10 | 80-20 | 75-25 | 70-30 | 0-100 |
|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| VAR 10 JOURS | 5.86% | 4.53% | 4.93% | 5.40% | 6.38% | 17.94% |
| VAR 30 JOURS | 10.14% | 7.85% | 8.53% | 9.35% | 11.06% | 31.07% |
| PERFORMANCE SUR LA PÉRIODE | 44.07% | 73.67% | 106.09% | 126.66% | 147.40% | 454.16% |
| σ | 1.65% | 1.54% | 1.60% | 1.68% | 1.82% | 4.84% |
| μ | 0.072% | 0.109% | 0.143% | 0.161% | 0.179% | 0.338% |
| $\frac{\mu}{\sigma}$ | 0.047 | 0.071 | 0.090 | 0.096 | 0.098 | 0.070 |

Comme nous pouvons le voir sur le tableau ci-dessus, nous avons plusieurs mesures de risque pour différentes pondérations du bitcoin dans le portefeuille (avec rééquilibrage). On voit qu'un portefeuille composé uniquement de S&P 500 (100-0) possède une VaR historique 10 jours et 30 jours plus élevée que des portefeuilles avec une part de bitcoin qui ne dépasse pas 30% du portefeuille. Nous mesurons aussi l'écart-type des rendements journaliers σ ainsi que la moyenne de ces rendements μ pour les différents portefeuilles. Ces deux mesures servent à calculer un ratio $\frac{\mu}{\sigma}$ qui s'apparente au ratio de Sharpe qui mesure le rendement ajusté au risque. On peut considérer qu'un ratio élevé est positif puisqu'il implique un rendement plus élevé relativement au risque pris. On constate qu'un portefeuille composé uniquement

du S&P 500 a le ratio le plus faible par rapport aux autres portefeuilles et que le ratio le plus élevé est obtenu par le portefeuille avec 30% de bitcoin.

Ces différentes mesures nous amènent à dire qu'il pourrait être pertinent d'avoir un portefeuille composé de 25% de bitcoin et 75% de S&P 500 (ou 20% bitcoin et 80% S&P 500 selon le profil de risque). Les VaR 10 et 30 jours sont plus faibles que pour un portefeuille 100% S&P 500 et le ratio $\frac{\mu}{\sigma}$ est plus élevé. Par ailleurs, on peut noter que les VaR historiques du portefeuille 100% bitcoin (0-100) sont très proches des VaR calculées dans la partie [4.2](#).

Nous pouvons reproduire ce tableau pour une autre période, entre le 8 janvier 2018 et le 6 janvier 2020. Cette période correspond à une phase de marché baissier pour le bitcoin, mais haussier pour le S&P 500, on s'attend donc à des résultats différents sur nos portefeuilles.

Tableau 5.3 - VaR historique 10 jours et 30 jours, écart-type et moyenne des rendements journaliers et ratio moyenne/écart-type pour des portefeuilles avec des pondérations différentes. Du 8 janvier 2018 au 6 janvier 2020.

| PORTEFEUILLE (S&P 500 - BTC) | 100-0 | 90-10 | 80-20 | 75-25 | 70-30 | 0-100 |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| VAR 10 JOURS | 4.76% | 4.86% | 5.52% | 6.58% | 7.38% | 30.80% |
| VAR 30 JOURS | 8.24% | 8.42% | 9.56% | 11.39% | 12.79% | 53.36% |
| PERFORMANCE SUR LA PÉRIODE | 18.14% | 13.80% | 10.39% | 6.01% | 5.79% | -52.09% |
| σ | 0.95% | 0.95% | 1.18% | 1.36% | 1.58% | 5.03% |
| μ | 0.033% | 0.026% | 0.020% | 0.012% | 0.011% | -0.15% |
| $\frac{\mu}{\sigma}$ | 0.035 | 0.027 | 0.017 | 0.0088 | 0.0070 | -0.030 |

Nous voyons qu'en fonction de la période de temps choisie, l'impact du bitcoin dans un portefeuille est complètement différent. Aucun portefeuille n'a un meilleur rendement journalier moyen qu'un portefeuille composé à 100% du S&P 500 et aucun portefeuille n'a un écart-type inférieur à ce portefeuille 100% S&P 500, cela se traduit par un ratio $\frac{\mu}{\sigma}$ qui est plus élevé. On remarque que les VaR historiques des différents portefeuilles restent relativement proches de celles calculées pour l'autre période, une pondération raisonnable de bitcoin affecte peu les pertes potentielles d'un portefeuille. Aussi, on constate que les VaR historiques du bitcoin sont beaucoup plus élevées pour la période 2018-2020 que pour la période 2020-2022. Cet écart de valeur renforce la crédibilité de notre modèle RSFV qui présente de fortes variations dans l'évolution de la VaR.

Tableau 5.4 - Comparaison de la VaR 30 jours, de l'écart-type et de la moyenne des rendements journaliers simulés sur 30 jours pour le modèle RSFV et EGARCH

| PRIX SIMULÉS SUR 30 JOURS | S&P 500 (MODÈLE RSFV) | S&P 500 (MODÈLE EGARCH) | BTC (MODÈLE RSFV) | BTC (MODÈLE EGARCH) | PORTEFEUIL LE 80-20 (MODÈLE RSFV) | PORTEFEUIL LE 80-20 (MODÈLE EGARCH) |
|--|--|--|----------------------------------|------------------------------------|--|--|
| VAR 30 JOURS | 12.18% | 10.54% | 31.48% ⁹ | 32.72% | 15.99% | 11.95% |
| σ | 1.32% | 1.08% | 3.78% ¹⁰ | 4.08% | 1.80% | 1.29% |
| μ | -0.00096% | 0.0012% | -0.049% ¹¹ | -0.000036% | -0.014% | -0.00039% |

Le tableau ci-dessus montre quelques mesures pour comparer les simulations de prix sur 30 jours avec notre modèle RSFV et un modèle EGARCH. Nous pouvons constater que le modèle EGARCH tend à sous-estimer la VaR pour le S&P 500 et le portefeuille. De plus la VaR historique calculée plus haut semble

⁹ 32.81% avec un coefficient de Hurst calculé avec la méthode MF-DFA.

¹⁰ 3.85% avec un coefficient de Hurst calculé avec la méthode MF-DFA.

¹¹ -0.057% avec un coefficient de Hurst calculé avec la méthode MF-DFA.

trop faible dans les périodes de marché haussier par rapport à la VaR estimée avec le modèle RSFV. Enfin, nous voyons que la méthode de calcul MF-DFA pour le coefficient de Hurst semble surestimer les valeurs observées par rapport à la méthode SF.

CONCLUSION

Nous avons finalement réussi à définir un modèle RSFV permettant de mieux décrire les différentes propriétés de la volatilité du bitcoin. Avec la méthode MF-DFA et la méthode SF nous avons pu estimer le coefficient de Hurst, ce qui nous a permis de simuler la volatilité et le prix du bitcoin. Avec ces simulations nous avons défini une VaR (30 jours et 10 jours) ainsi que l'évolution de cette VaR sur les deux dernières années. En comparant avec l'évolution de la VaR obtenue avec un modèle EGARCH, nous avons vu que notre modèle RSFV engendrait une VaR avec de plus fortes variations à travers le temps. Cette observation est due aux caractéristiques de la volatilité (*volatility clustering* et corrélation négative entre rendement du bitcoin et variations de la volatilité) et est plus représentative de la réalité que les résultats obtenus par le modèle EGARCH.

De plus, les mesures de corrélation et de performances ont montré que le bitcoin peut offrir une bonne diversification à long terme dans un portefeuille composé du S&P 500. Il reste important de bien gérer la pondération du bitcoin dans notre portefeuille ainsi que de la fréquence de rééquilibrage pour mieux gérer le risque. Effectivement cet actif reste risqué comme le montrent les fortes variations de la VaR, néanmoins sur les deux dernières années un portefeuille avec une pondération de 20% de bitcoin et 80% de S&P 500 affiche un meilleur rendement journalier moyen pour un risque journalier moyen plus faible par rapport au S&P 500. En revanche, quand le prix du bitcoin est dans une phase baissière (2018-2020), il est préférable de détenir peu de bitcoin. Dans tous les cas il n'y a pas de raisons de ne pas détenir du bitcoin dans son portefeuille à long terme, d'après nos observations les pertes potentielles augmentent très peu (par rapport à un portefeuille 100% S&P 500) quand le prix du bitcoin est dans une phase baissière et diminuent quand le prix du bitcoin est dans une phase haussière.

Le bitcoin reste encore très jeune, mais il s'intègre de plus en plus dans les portefeuilles des gérants institutionnels et des particuliers. De plus en plus cet actif est sérieusement considéré comme un actif risqué au même titre que des actions plutôt que comme un placement alternatif, et les nombreuses recherches à son sujet montrent un réel engouement. Les prochains mois et les prochaines années seront très intéressants pour le bitcoin, effectivement nous ne savons pas comment cet actif réagit dans un

contexte de récession économique ou dans un contexte où la Réserve Fédérale des États-Unis augmente fortement ses taux directeurs et retire ses liquidités du marché¹².

Cet essai a montré une façon de modéliser et simuler la volatilité du bitcoin, de calculer d'autres mesures de risques pour mieux appréhender cet actif peut être une piste de recherche. Il serait aussi intéressant d'étudier et de déterminer les phases du cycle de prix du bitcoin, la relation entre ces phases et les phases du cycle économique ou encore la relation entre ces phases et les caractéristiques de la blockchain Bitcoin (données « on-chain », étude des transactions entre les différents portefeuilles, *halvings*...). Le bitcoin n'est qu'un crypto-actif parmi tant d'autres et à mesure que ce secteur prend en maturité, il sera indispensable de s'y intéresser.

¹² <https://www.bloomberg.com/news/articles/2022-05-04/fed-hikes-rates-half-point-will-shrink-assets-to-curb-inflation?srnd=premium-canada>

ANNEXE A

Évolution et comparaison des différents portefeuilles

Figure 5.1 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (90% S&P 500 et 10% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

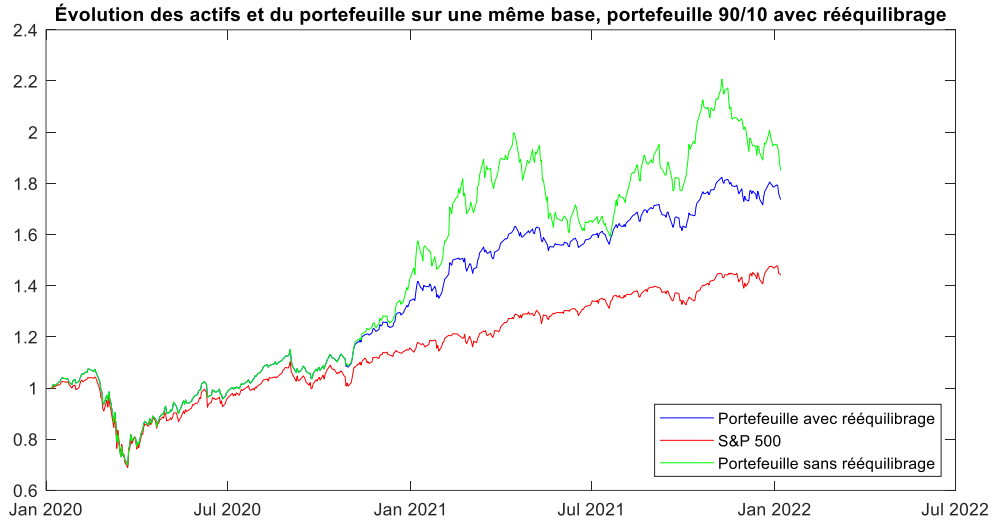


Figure 5.2 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (80% S&P 500 et 20% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

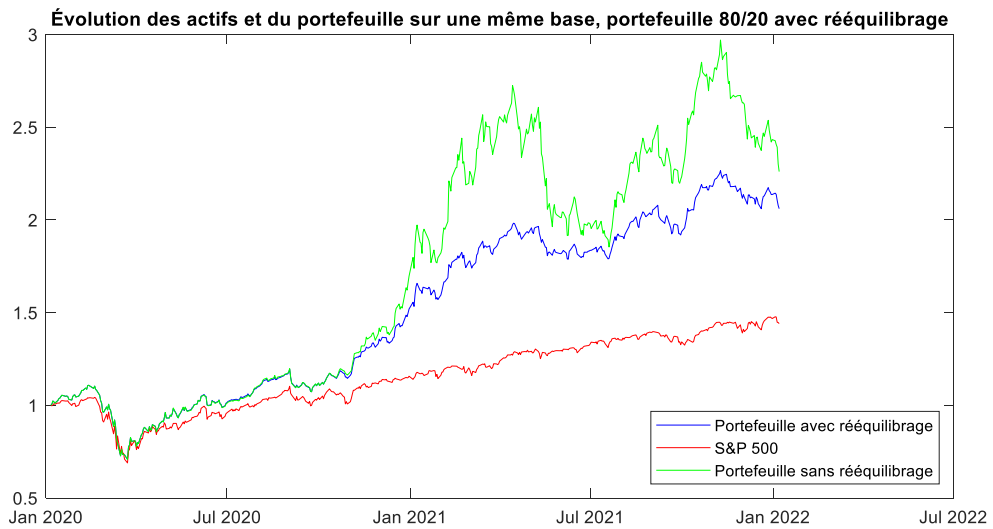


Figure 5.3 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (75% S&P 500 et 25% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

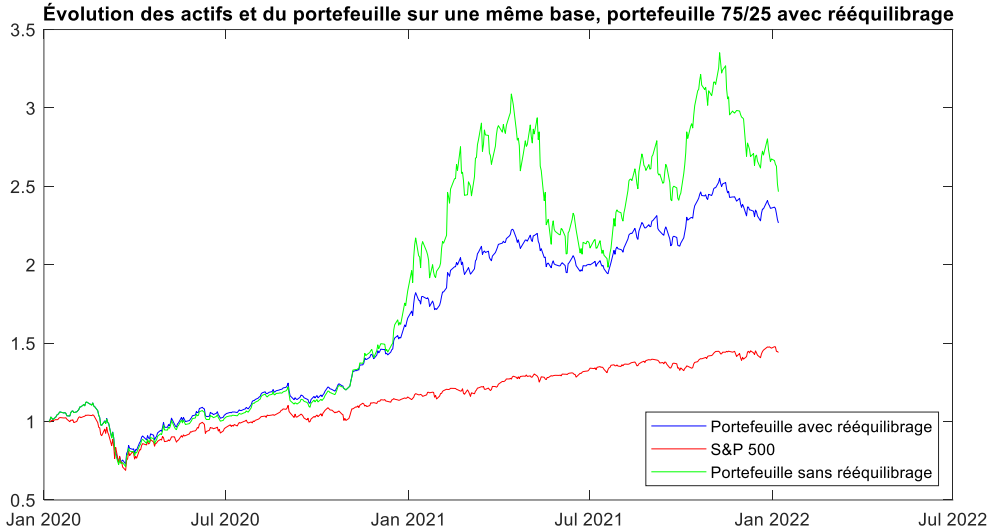


Figure 5.4 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (70% S&P 500 et 30% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

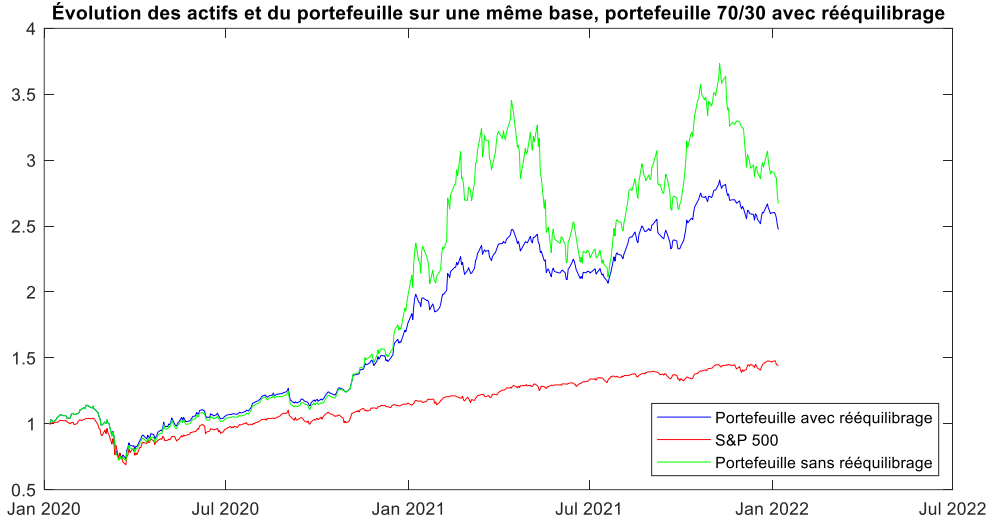


Figure 5.5 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (90% S&P 500 et 10% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

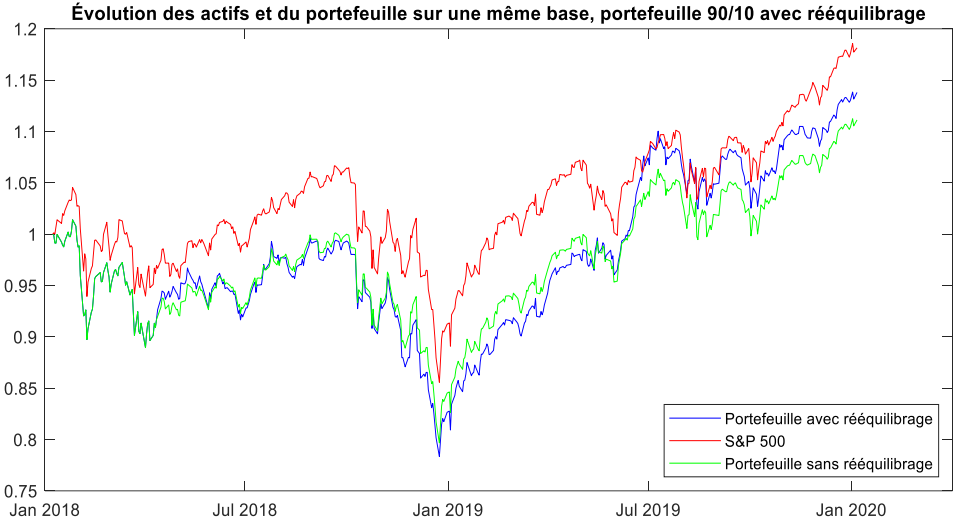


Figure 5.6 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (80% S&P 500 et 20% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

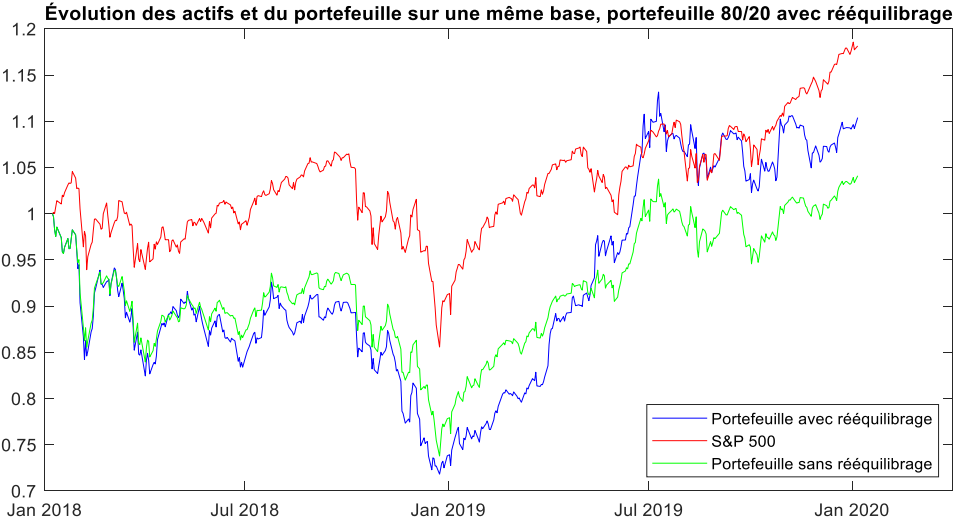


Figure 5.7 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (75% S&P 500 et 25% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.

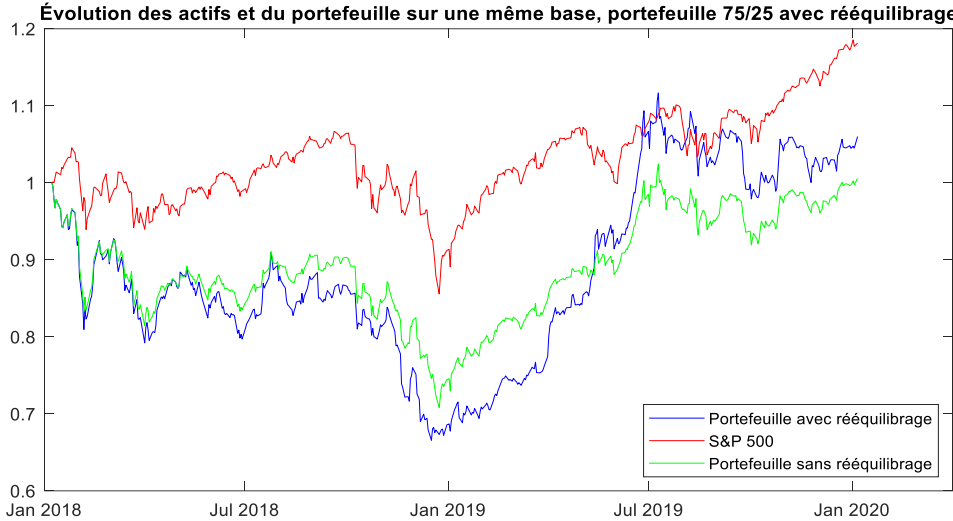
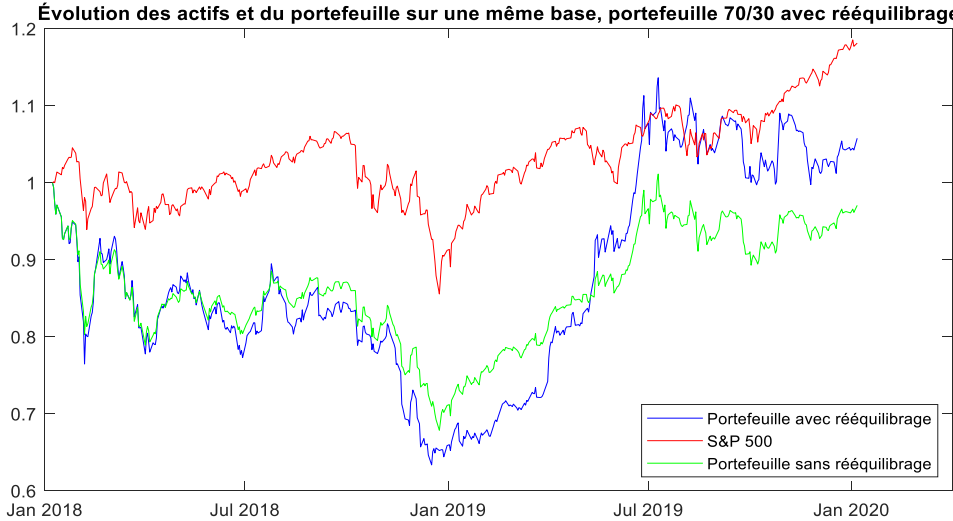


Figure 5.8 - Comparaison de l'évolution du S&P 500 (en rouge), du portefeuille avec rééquilibrage (70% S&P 500 et 30% bitcoin) (en bleu) et du portefeuille sans rééquilibrage en vert.



ANNEXE B

Prix du bitcoin et coefficients de Hurst pour différentes périodes

Figure 5.9 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2015 au 14 janvier 2017 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).

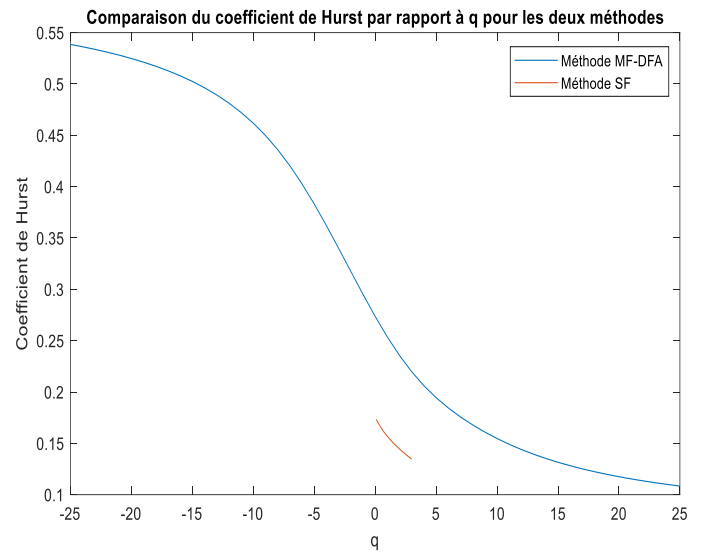
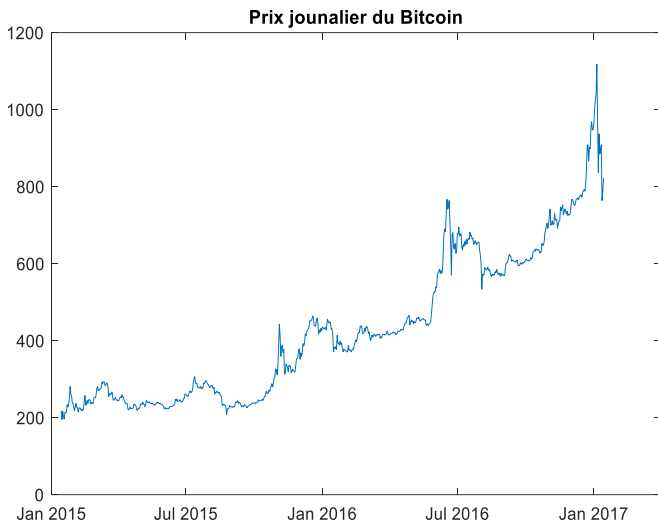


Figure 5.10 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2016 au 14 janvier 2018 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).

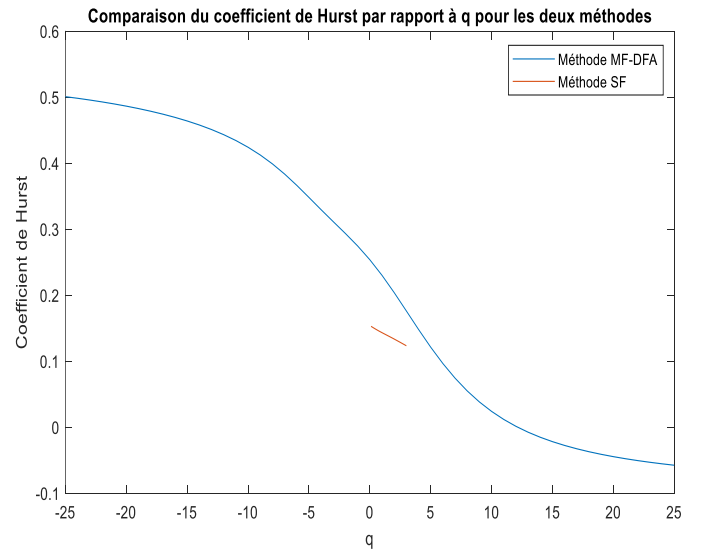
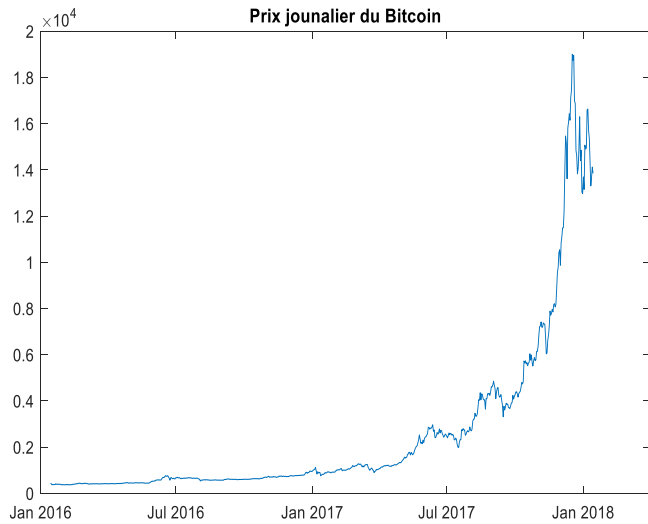


Figure 5.11 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2017 au 14 janvier 2019 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).

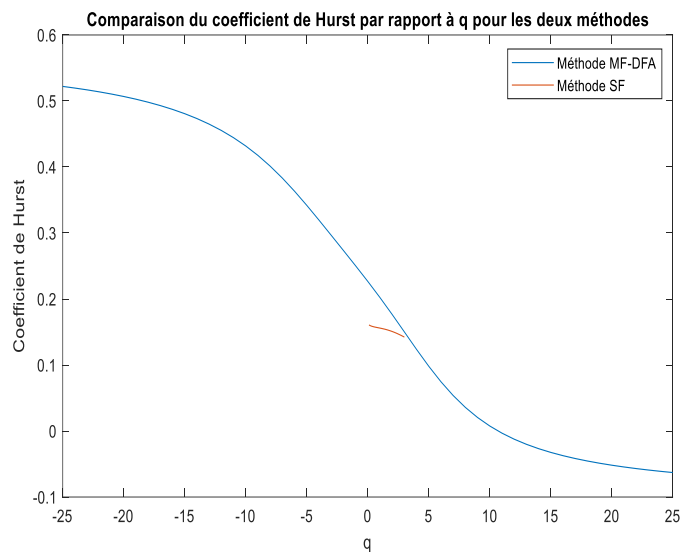
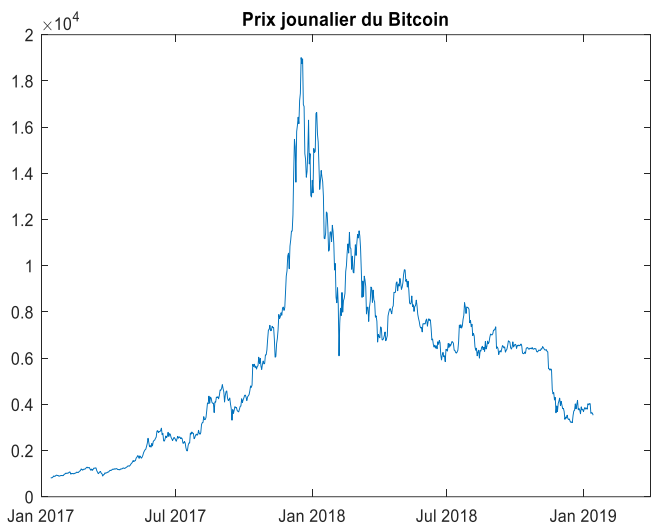


Figure 5.12 a. et b. – Prix du bitcoin du 14 janvier 2018 au 14 janvier 2020 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).

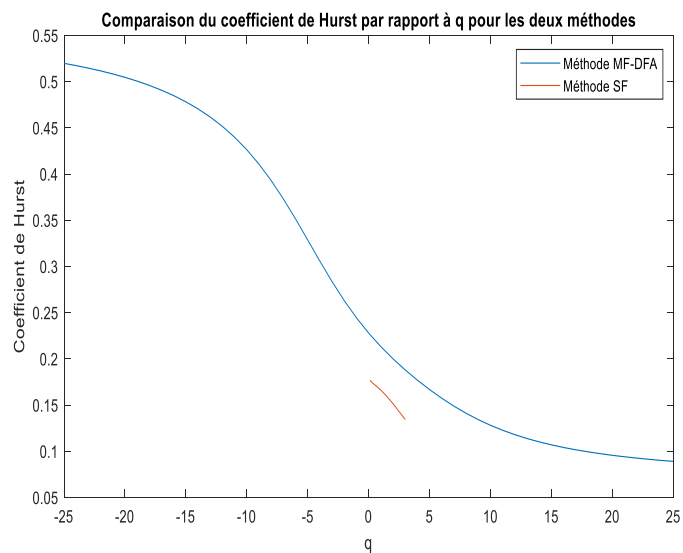
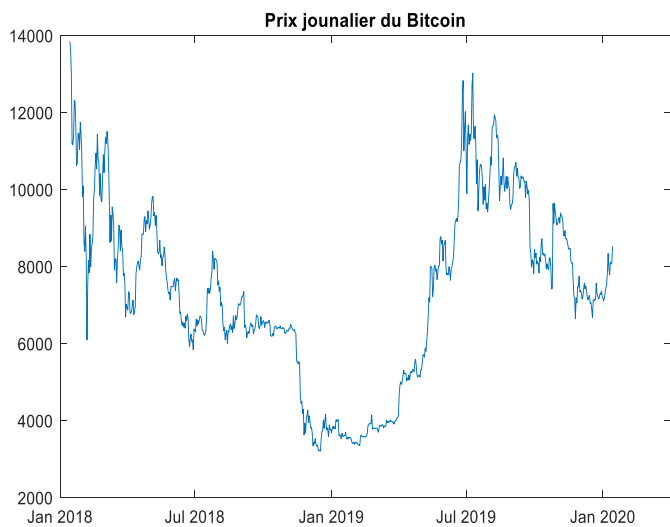


Figure 5.13 a et b – Prix du bitcoin du 14 janvier 2019 au 14 janvier 2021 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).

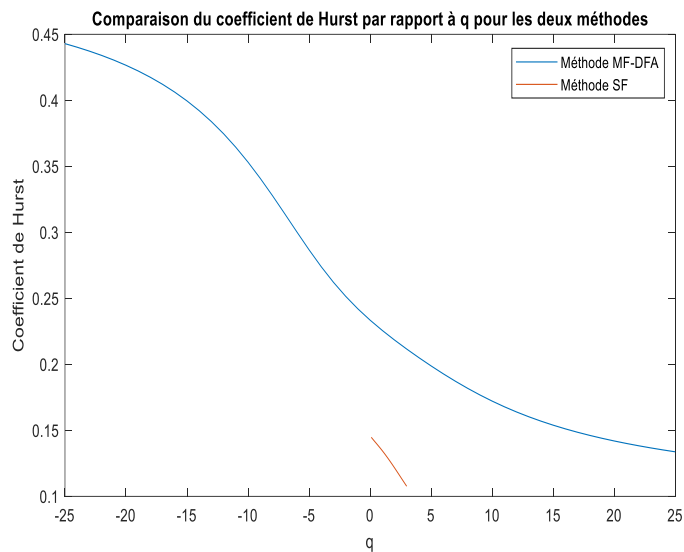
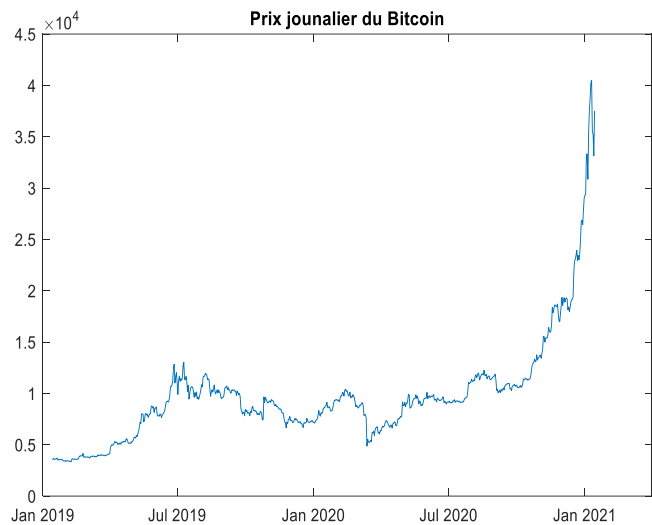
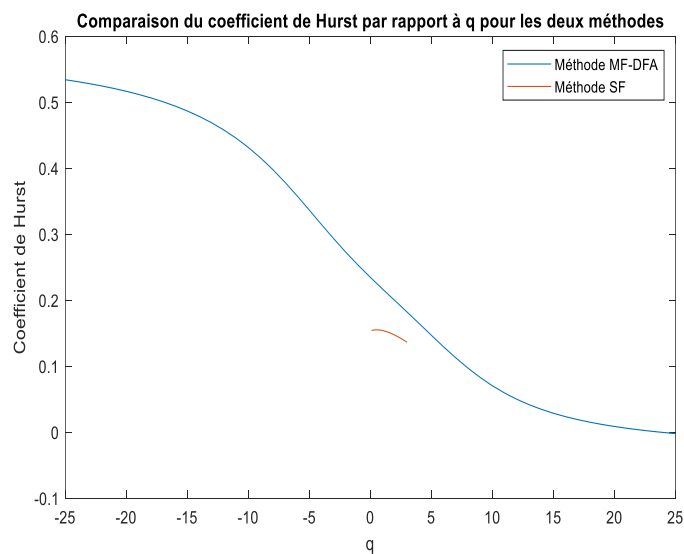
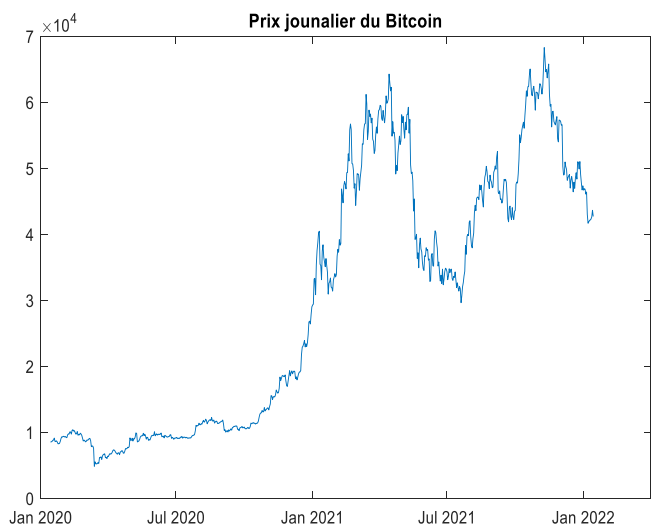


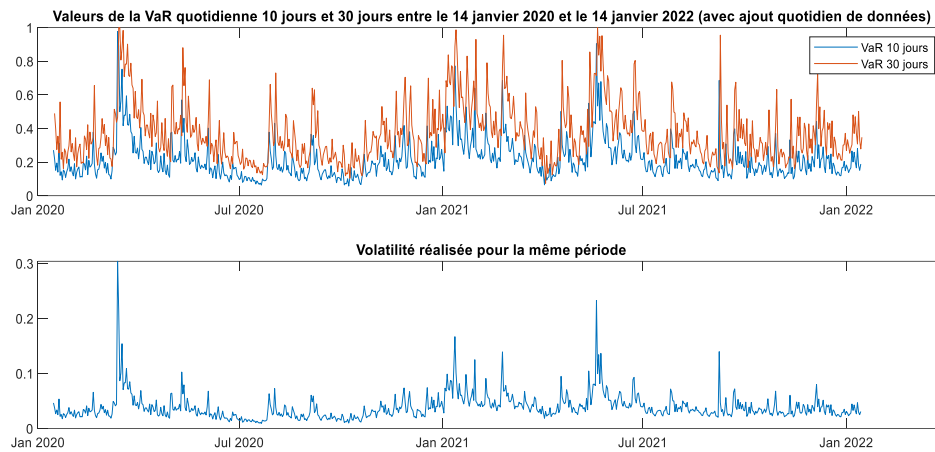
Figure 5.14 Prix du bitcoin du 14 janvier 2020 au 14 janvier 2022 (à gauche) et comparaison du coefficient de Hurst pour différents q et pour la méthode MF-DFA (en bleu) et SF (en orange).



ANNEXE C

Évolution de la VaR simulée avec le coefficient de Hurst calculé avec la méthode MF-DFA

Figure 5.15 - Comparaison entre la VaR (en %) quotidienne calculée à partir d'une volatilité estimée avec un modèle RSFV sur les deux dernières années et la volatilité réalisée pour la même période (méthode MF-DFA)..



BIBLIOGRAPHIE

- Ardia, D., Bluteau, K., & Rüede, M. (2019). Regime changes in Bitcoin GARCH volatility dynamics. *Finance Research Letters* 29, pp. 266-271.
- Bandi, F., & Russell, J. (2006). Separating microstructure noise from volatility. *Journal of Financial Economics* 79, pp. 655-692.
- Cheridito, P., Kawaguchi, H., & Maejima, M. (2003). Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Electronic Journal of Probability* 3, pp. 1-14.
- Deutsche Bank Research. (2021). *The Future of Payments: Series 2 - Part III. Bitcoins: Can the Tinkerbell Effect Become a Self-Fulfilling Prophecy?*
- Dupret, J.-L. (2020). Rough stochastic volatility modeling. Faculté des sciences, Université catholique de Louvain.
- Gatheral, J., Jaisson, T., & Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. *Quant Finance* 18, pp. 933-949.
- Kantelhardt, J., Zschiegner, S., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A* 316, pp. 87-114.
- Katsiampa, P. (2017). Volatility estimation for Bitcoin: A comparison of GARCH models. *Economics Letters* 158, pp. 3-6.
- Klein, T., Thu, H., & Walter, T. (2018). Bitcoin is not the New Gold – A comparison of volatility, correlation, and. *International Review of Financial Analysis* 59, pp. 105-116.
- Kou, S., Peng, X., & Heyde, C. (s.d.). External risk measures and Basel accords. *Mathematics of Operations Research*.

Kroese, D., & Botev, Z. (2015). Spatial process simulation. Dans V. Schmidt (Éd.), *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*, pp. 369-404.

Liu, L., Patton, A., & Sheppard, K. (2015). Does anything beat 5-minute RV? A comparison of realized measures. *Journal of Econometrics* 187, pp. 293-311.

McKinsey & Company. (2012). *Managing market risk: Today and tomorrow*.

Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. Récupéré sur <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>

Neureuter, J. (2021). *The institutional investor digital assets study*. Fidelity Digital Assets.

Rosenbaum, M. (2011). A new microstructure noise index. *Quantitative Finance* 6, pp. 883-899.

Takaishi, T. (2020). Rough volatility of Bitcoin. *Finance Research Letters* 32.

Thompson, J. R., & Wilson, J. R. (2014). *Multifractal detrended fluctuation analysis: Practical applications to financial time series*.